第 1 章　极限与连续

1.1　函数

要求：理解分段函数、复合函数、初等函数、反函数、隐函数的概念与特性。

1、填空题

(1) 设 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x \ge 0$ 时 $f(x)=\sqrt{x}$，则当 $x<0$ 时

$f(x)=$ $-\sqrt{-x}$；

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,3]$；

(3) 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$ 的奇偶性为 奇函数；

(4) 设 $g(x)=\frac{2^x}{2^x+1}$，则其反函数 $g^{-1}(x)=$ $\log_2\frac{x}{1-x}$　$x\in(0,1)$；

(5) 设 $f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$ x^2+2；

(6) 若 $y=f(u)=e^u$，$u=g(v)=-v^2$ $v=h(w)=\sin w$，

$w=\varphi(x)=\frac{1}{x}$，则复合函数 $y=f(g(h(\varphi(x))))=$ $e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$。

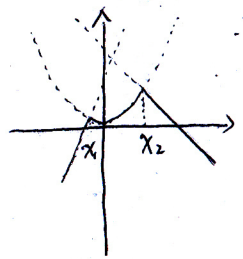
2、设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$。

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x\in(\frac{1}{e},e)\\ 0 & x=\frac{1}{e}\text{ 或 }x=e\\ -1 & x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e,+\infty)\end{cases}$$

3、设 $f(x)=\min\{2x+5,x^2,-x+6\}$，试给出 $f(x)$ 的分段表达式，画出 $f(x)$ 的图形，并求 $\max f(x)$。

求交点　令 $2x+5=x^2$ 得 $x=\pm\sqrt{6}$ $\Rightarrow x_1=1-\sqrt{6}$

令 $-x+6=x^2$ 得 $x=-3$ 或 2 $\Rightarrow x_2=2$



$\therefore f(x)=\min\{2x+5,\ x^2,\ -x+6\}$

$$=\begin{cases}2x+5 & x<1-\sqrt{6}\\ x^2 & 1-\sqrt{6}\le x\le 2\\ -x+6 & x>2\end{cases}$$

~~$x=1-\sqrt{6}$ 时~~ 而 $f(1-\sqrt{6})=7-2\sqrt{6}$

$f(2)=4$

$\therefore \max f(x)=f(2)=4$

1.2 数列的极限

要求： 了解数列极限的定义，掌握收敛数列的性质。

1、选择题

(1) 下列命题中正确的是 （ D ）

（A）发散数列必然无界 （B）两个发散数列之和必然发散

（C）两个无界数列之和必然发散 （D）收敛数列必然有界

(2)下列说法中与“ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ ”等价的是 （ D ）

$\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\}$

（A）随着 n 的增大，x_n 越来越接近常数 A

（B）点 A 的无论多么小的邻域内都有数列 $\{x_n\}$ 中无穷多个点

（C）数列 $\{x_n\}$ 中所有的点都落在 A 的某个邻域内

（D）无论正数 ε 有多么小，点 A 的 ε 邻域之外至多只有数列 $\{x_n\}$ 中有限多个点

2、用定义证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+1}=\frac{3}{4}$。

对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{3n+1}{4n+1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$，即要使

另：$N=\left[\frac{1}{16\varepsilon}-\frac{1}{4}\right]$

$\left|\frac{12n+4-12-3}{4(4n+1)}\right|=\frac{1}{4(4n+1)}<\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

$\therefore$ 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{3n+1}{4n+1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{4n+1}=\frac{3}{4}$

3、若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，而数列 $\{y_n\}$ 有界，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

$\because \{y_n\}$ 有界. $\therefore \exists M>0$，对 $\forall n\in N$，$|y_n|\le M$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ $\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$|x_n|<\frac{\varepsilon}{M}$

$\therefore |x_n y_n| = |x_n||y_n| \le \frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

1.3 函数的极限

要求： 掌握函数极限的定义和函数极限的性质。

1、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有界的_充分_条件；

(2) $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的_充要_条件。

2、用定义证明：$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$。

$x\ne -2$，$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=|x-2+4|=|x-(-2)|$

取 $\delta=\varepsilon$. 当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时

$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$

1.4 无穷小量与无穷大量

要求：了解无穷小、无穷大的概念及它们之间的关系，了解无穷小的性质及无穷小与极限之间的关系。

选择题

(1) 当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 均为无穷小量，下列变量中 $x \to x_0$ 时可能不是无穷小量的是　(D)

(A) $3\alpha(x)-4\beta(x)$　　(B) $2\alpha(x)+3\beta(x)$

(C) $\alpha(x)\beta(x)$　　(D) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}(\beta(x)\neq 0)$

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小量且恒不为 0，则当 $x \to x_0$ 时下列函数必为无穷大量的是　(D)

(A) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$　　(B) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

$f(x)=\cancel{}x\ (x\to 0)$
$g(x)=-x\ (x\to 0)$
(C) $\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}$　　(D) $\dfrac{1}{f(x)}+g(x)$

(3) 下列命题正确的是　(C)

(A)无界量必为无穷大量　(B)无穷大量的和必为无穷大量

(C)无穷大量必为无界量　(D)两个无界量的乘积必为无界量

$\frac{1}{x}$ $(0,+\infty)$
x $(0,+\infty)$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 是 $x \to x_0$ 时 $(f(x)-A)$ 为无穷小量的 (C)

(A) 充分而非必要条件　　(B) 必要而非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

1.5 极限运算法则

要求：掌握极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则。

1、填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=$ <u>$-\frac{1}{2}$</u>；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{(x-1)^2}=$ <u>∞</u>；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+2x-3}{x^3-8x^2+1}=$ <u>-1</u>；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}=$ <u>0</u>。

2、选择题

(1) 下列结论正确的是　(B)

(A)两个无穷大之和为无穷大　(B)有限个无穷小之和为无穷小

(C)无穷多个无穷小之和为无穷小(D)两个无穷小之商为无穷小

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=B$，则下列结论正确的是　(D)

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\dfrac{B}{A}$

(B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

(C) $A=0$ 时必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$　$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ 但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

(D) $A\neq 0$ 时必有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\dfrac{B}{A}$

3、计算下列极限

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+h^3+3h^2x+3hx^2-x^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(h^2+3hx+3x^2)=3x^2$

(2) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{-(1+x+x^2)}=-1$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{3-x}}{x^2+x-2}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(1+x)-(3-x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x})}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

(4) $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$=1$

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+\arctan x}{(x+\sin x)^2}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+\arctan x}{x^2+\sin^2 x+2x\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{\arctan x}{x^2}}{1+\frac{2\sin x}{x}+(\frac{\sin x}{x})^2}$

$=4$

(6) 已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+5x+6}{x+2} & x<-2\\ 0 & x=-2\\ 2x+5 & x>-2\end{cases}$，求 $\lim_{x\to-2}f(x)$。

$\because \lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}x+3=1$

$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}(2x+5)=1$

$\therefore \lim_{x\to-2}f(x)=1$

4、$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$，求 a 和 b 的值。

$\because \lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0$

$\therefore 1-a=0 \Longrightarrow a=1$

而 $a+b=0$

$\therefore b=-1$

综上：$a=1$，$b=-1$

1.6　极限存在准则　两个重要极限

要求：了解极限存在准则，熟练掌握利用两个重要极限求极限。

1、填空题

(1) 数列 $\{x_n\}$ 单调有界是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在的 __充分__ 条件；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}=$ __ω__ ，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=$ __0__ ；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x+2}$ __$=e^{-3}$__ ，$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$ __e^{2}__ 。

2、计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2+x-2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sin(x^2-1)}{(x+2)(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin 3x}{x}\right)$

$$\because \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{x}=0 \qquad \therefore 原极限=2+0=2$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)\cdot\frac{x}{-(x+1)}}$$

$$=e^{-1}$$

3、用极限准则证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$

证：
$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$$

(2) 数列 $x_1=\sqrt{3}$，$x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ $(n=1,2,\dots)$ 的极限存在。

证：1° $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}$

显然 $\{x_n\}$ 是单调增加的

2° $x_1=\sqrt{3}$，$x_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}<3$

假设 $x_k<3$，则 $x_{k+1}=\sqrt{3+x_k}<\sqrt{3+3}<3$

$\therefore \{x_n\}$ 是有上界 3

综上 1°，2°，$\{x_n\}$ 的极限存在.

1.7 无穷小的比较

要求： 熟练掌握无穷小的比较及利用等价无穷小替换求极限。

1、选择题

(1) 当 $x \to 0$ 时，与 $\sqrt{1+x^2}-1$ 等价的无穷小是　（ D ）

$(A)\ x$　　$(B)\ x^2$　　$(C)\ 2x^2$　　$(D)\ \dfrac{x^2}{2}$

(2)设 $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$，则当 $x \to 0$ 时成立的　（ A ）

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但不等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(3) 当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x^2$ 是关于 x 的（ C ）阶无穷小

$(A)\ 2$　　$(B)\ 3$　　$(C)\ 4$　　$(D)\ 5$

2、计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin 2x)}{e^{3x}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{3x}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan(x-1)}{e^x-e}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e(e^{x-1}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e(x-1)}=e^{-1}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(e^{\sin x}-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-\frac{1}{2}x^2)}{\frac{1}{3}x^3}=-\frac{3}{2}$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{(1+\cos x)\cdot x}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{1+\cos x}=0$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$$

3、若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-e}{x}$。

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}(f(x)-1)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^{f(x)-1}-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(f(x)-1)}{x}=e$$

1.8 函数的连续性与间断点

要求：理解函数连续和间断点的概念，了解初等函数的连续性，了解初等函数的连续性，会判断间断点的类型。

1、填空题

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{ax} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ <u>2</u>；

(2) 对于函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$，$x=0$ 是其 <u>跳跃</u> 间断点，$x=-1$ 是其 <u>无穷</u> 间断点，$x=1$ 是其 <u>可去</u> 间断点。

2、选择题

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & x<0\\ x & 0\le x\le 2\\ \dfrac{\sin(2x-4)}{x-2} & x>2\end{cases}$ 的连续区间为 （ B ）

(A) $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ (B) $(-\infty,+\infty)$
(C) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (D) $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

(2) $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 的 （ B ）

(A)可去间断点 (B)跳跃间断点 (C)无穷间断点 (D)振荡间断点

(3) $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ 的 （ B ）

(A)可去间断点 (B)跳跃间断点 (C)无穷间断点 (D)振荡间断点

3、计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

4、设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+a & x<0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{\ln(1+bx)}{x} & x>0\end{cases}$ 处处连续，求 a 和 b 。

$\because f(0-)=f(0)$ $\therefore 1+a=2$ $\therefore a=1$

$\because f(0+)=f(0)$ $\therefore b=2$

5、求下列函数的间断点并说明间断点类型。

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$x=k\pi$ $(k\in Z)$ 是 $f(x)$ 的间断点.

对 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$：$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$ ∴是可去间断点

对 $x=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$：$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty$ ∴是无穷间断点

对 $x=0$：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$ ∴是可去间断点.

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} & x>0 \\ \ln(1+x) & -1<x\le 0 \end{cases}$

$x=1$ 是间断点

$x=0$ 是可疑间断点

对 $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}}=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}}=\infty$

∴ 是无穷间断点

对 $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{1-x}}=e$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(1+x)=0$ ∴ 是跳跃间断点

6、已知 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 与可去间断点 $x=1$，求 a,b 的值。

∵ $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点

∴ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在

∴ $\lim\limits_{x\to 1}(e^x-b)=0$ （否则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$）

∴ $b=e$

∵ $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点

而 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-e)=1-e\neq 0$

∴ $a=0$

∴ $a=0$, $b=e$

1.9 闭区间上连续函数性质

要求：掌握闭区间上连续函数的性质。

1、证明：方程 $x=a\cos x+b$（$a>0,b>0$）至少有一个不超过 $a+b$ 的正根。

令 $f(x)=x-a\cos x-b$，则 $f(a+b)=a+b-a\cos(a+b)-b$

$=a(1-\cos(a+b))\geq 0$

①若 $f(a+b)=0$，则方程 $x=a\cos x+b$ 有正根 $a+b$.

②若 $f(a+b)>0$，又 $f(0)=0-a-b<0$

又∵ $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续

由零点 Th：$\exists\xi\in(0,a+b)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $x=a\cos x+b$ 有一个小于 $a+b$ 的正根

综上①②，方程 $x=a\cos x+b$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

2、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)>a$，$f(b)<b$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\xi$。

令 $F(x)=f(x)-x$

∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

∴ $F(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续

且 $F(a)=f(a)-a>0$，$F(b)=f(b)-b<0$

∴ 至少 $\exists$ 一点 $\xi\in(a,b)$ s.t. $F(\xi)=0$

即 $f(\xi)=\xi$

1.10　总习题

1、填空题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=e^4$，则 $a=$ ___2___ ；

(2) 若 a,b,c,d 均为正数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n}=$ ___$\max\{a,b,c,d\}$___

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n+n})=$ ___$\frac{1}{2}$___；

(4) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}x^k\arctan\frac{2}{x^2}=2$，则 $k=$ ___2___；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则 $a=$ ___2___，$b=$ ___-8___；

(5) ∵ $x\to 2$ 极限存在

∴ $2^2+2a+b=0$

∴ $b=-4-2a$

代入分子因式分解得

$(x-2)(x+(a+2))$

则 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+a+2}{x+1}=2$

∴ $a=2$

$b=-8$

(6)已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $k=$ ___$\frac{3}{2}$___；

(7) 对于函数 $f(x)=\frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$，$x=1$ 是其___跳跃___间断点，

$x=0$ 是其___可去___间断点 ；

(8) 当 $x\to 0$ 时，$e^{x^2}-\cos x$ 是关于 x 的___2___阶无穷小。

2、选择题

(1) 设 $f(x)=\frac{\sin(x^3+1)}{x^2+1}$，该函数是　　　　(D)

(A) 奇函数　(B) 偶函数　(C) 周期函数　(D)有界函数

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则当 $x\to x_0$ 时成立的是　　　　(D)

(A) $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 高阶的无穷小

(B) $\alpha(x)$ 是较 $\beta(x)$ 低阶的无穷小

(C) $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ 是无穷大量　　(D) $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 是无穷小量

$\lim f(x)=\infty \Rightarrow \lim\frac{1}{f(x)}=0$

$\lim f(x)=0$ 且 $f(x)\neq 0 \Rightarrow \lim\frac{1}{f(x)}=\infty$

(3) 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是　　　　(D)

(A) $\frac{|x|}{x}-1\ (x\to 0)$　　(B) $\frac{1}{(x-1)^3}-1\ (x\to 1)$

(C) $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0+0)$　　(D) $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0-0)$

(4) 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量阶数最高的是　　　　(C)

(A) $1-\cos\sqrt{x}$　$\frac{1}{2}x$　　(B) $\sqrt{x}+x^4$　$x^{\frac{1}{2}}$

(C) $x\sin\sqrt{x}$　$x^{\frac{3}{2}}$　　(D) $x\sqrt{x+\sqrt{x}}$　$x^{\frac{5}{4}}$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=$ $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$　$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$　　(B)

(A) ∞　　(B) 不存在　　(C) 2　　(D) 0

(6) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}=$ $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}=\sqrt{2}$　$\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}=-\sqrt{2}$　　(D)

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 不存在

(7) 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时成立的是　　　　(B)

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但不等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小

(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1+3^x-1}{x}=\ln 2+\ln 3$

$\ln(1+\cos x^3-1) \sim \cos x^3-1 \sim -\frac{1}{2}x^6$

(8) 当 $x \to 0$ 时，$\ln\cos x^3$ 是关于 x^2 的（ B ）阶无穷小

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

(9)下列命题中正确的是（ B ）

(A) 在其定义区间内连续的函数一定是初等函数

(B) 初等函数在其定义区间内连续

(C) $f(u)$ 处处连续，x_0 是 $\varphi(x)$ 的间断点，则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 一定不连续

(D) $f(x)$ 在 x_0 处连续，$g(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处一定不连续

3、求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$

$x>0$：原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-n^{-2x}}{1+n^{2x}}=1$

$x=0$：原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-1}{1+1}=0$

$x<0$：原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1}=-1$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\pi+\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\pi$

$=0$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-(\sqrt{1+x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin(m(t+\pi))}{\sin(n(t+\pi))}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt}$

$=(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$

(5) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to3}\left[\left(1+\dfrac{3-x}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3-x}}\right]^{\frac{3-x}{x-2}\cdot\frac{1}{x-3}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to3}\frac{3-x}{x-2}\cdot\frac{1}{x-3}}=e^{-1}$

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}})\ (a>0)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\ln a}{\frac{1}{n^2}}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}a^{\frac{1}{n+1}}\cdot\ln a\cdot\dfrac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}$

$=\ln a$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a_1^x+a_2^x+\dots+a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}}$ ($a_i>0$)

$=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{n-(a_1^x+\cdots+a_n^x)}{n})^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{n-(a_1^x+\cdots+a_n^x)}{n})^{-\frac{n}{n-(a_1^x+\cdots+a_n^x)}\cdot[-\frac{n-(a_1^x+\cdots+a_n^x)}{n}]\cdot\frac{1}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x-n}{nx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_1^x-1+a_2^x-1+\cdots+a_n^x-1}{x}\cdot\frac{1}{n}}$

$=e^{(\ln a_1+\ln a_2+\cdots(\ln a_n)\cdot\frac{1}{n}}$

$=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)(1-x+x^2)}{\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(x^2+x^4)}{\sin^2 x}=1$

4、设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，求 $f(x)$。

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^3}$ 存在 $\therefore f(x)$的最高次项只能为 x^3

$\therefore$ 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$\because \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2}=2$ $\therefore a=2$

又$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+bx+c}{x}$ 存在 $\therefore c=0$

又$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+bx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(2x+b)=b=1$ $\therefore b=1$

综上：$f(x)=x^3+2x^2+x$

5、若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求 a,b 的值。

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0$

$\therefore 1-a^2=0 \Rightarrow a=1$ ($a=-1$舍去，$\because$如果$a=-1$，原极限$=\infty$，矛盾)

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(1+2b)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-(1+2b)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}=-(1+2b)=0$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$

综上 $a=1$，$b=-\frac{1}{2}$

6、设 $x_1=1, x_{n+1}=\frac{3(x_n+1)}{x_n+3}$（$n$=1, 2,…），证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求出极限值。

1° $x_1=1$，$x_2=\frac{3}{2}$，假设 $x_k<3$，则 $x_{k+1}=\frac{3(x_k+1)}{x_k+3}$

$=\frac{3x_k+9-6}{x_k+3}=3-\frac{6}{x_k+3}<3$ ($\because x_n>0$)

2° $x_{n+1}-x_n=\frac{3(x_n+1)}{x_n+3}-\frac{3(x_{n-1}+1)}{x_{n-1}+3}=3\cdot\frac{2(x_n-x_{n-1})}{(x_n+3)(x_{n-1}+3)}>0$

$\therefore \{x_n\}$ 单调

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 l，$l=\frac{3(l+1)}{l+3}$ 解得 $l=\sqrt{3}$

7、写出函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\tan x}$ 的全部间断点，并指明间断点的类型。

对 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$：$\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\tan x}=0$ ∴是可去间断点

对 $x=k\pi$ $(k\in Z$且$k\neq 0)$：$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\tan x}=\infty$ ∴是无穷间断点

$x=0$：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-(\sqrt[3]{1+x}-1)}{x}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ∴是可去间断点

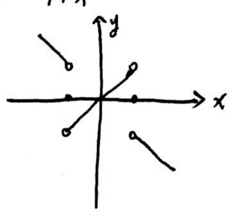
8、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,如果有间断点,说明其类型。

当 $|x|>1$ 时：$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=+\infty$. ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=-x$

当 $|x|<1$ 时：$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=x$

当 $|x|=1$ 时：$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x=0$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$$



$x=\pm1$ 都为跳跃间断点

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续

9、$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\ldots x_n<b$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$。

证：∵ $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 上连续

∴ $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上取得最大值，设为 M，最小值，设为 m

∵ $m\leq f(x_i)\leq M$ $(i=1,2,\cdots,n)$

∴ $nm\leq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leq nM$

∴ $m\leq\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))\leq M$

∴ $\exists\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_2)]$

10、设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且有 $f(0)=f(2a)$，证明：$\exists\xi\in[0,a]$ 使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$。

证：令 $F(x)=f(x)-f(a+x)$

$F(0)=f(0)-f(a)$ $F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

∴ $F(0)F(a)=-(f(0)-f(a))^2$

① 当 $f(0)=f(a)$ 时，即 $\xi=0$，使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$

② 当 $f(0)\neq f(a)$ 时，$F(0)F(a)<0$

∵ $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 连续，∴ $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续

根据零点定理，$\exists\xi\in(0,a)$，使得 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=f(a+\xi)$

综上①②：$\exists\xi\in[0,a]$，使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$

导数与微分

2.1　导数的定义

要求：理解导数概念,了解导数的几何意义及可导与连续的关系。

1、填空题

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 __充分__ 条件，$f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的 __必要__ 条件；

(2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的 __充要__ 条件；

(3) 设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=$ __$f'(x_0)$__ ，

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+mh)-f(x_0-nh)}{h}=$ __$(m+n)f'(x_0)$__ ；

(4) $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$，则 $f'(9)=$ __$-9!$__ ；

(5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=$ __$-\dfrac{1}{x^2}$__ ，$(\sqrt{x})'=$ __$\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$__，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)'=$ __$-\dfrac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$__；

2、求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(2,\ln 2)$ 处的切线方程与法线方程。

切线斜率 $k=(\ln x)'|_{x=2}=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{2}$

法线斜率为 $-\dfrac{1}{k}=-2$

∴切线~~斜率~~方程： $y-\ln 2=\dfrac{1}{2}(x-2)$

法线方程： $y-\ln 2=-2(x-2)$

3、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 点可导。

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在　　$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

又∵ $f(x)$ 在 $x=0$ 连续　　$\therefore f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$　　∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导

法二：$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=k\cdot 0=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k$

4、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$，问 a,b 应取什么值时，函数 $f(x)$ 处处可导。

$x=1$ 时：∵ $f(x)$ 可导，则 $f(x)$ 连续

$\therefore f(1+)=f(1-)=f(1)=1$

即 $1=a+b \Rightarrow b=1-a$

∵ $f(x)$ 可导　$\therefore f'_-(1)=f'_+(1)$　即 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+1-a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax-a}{x-1}=a$

$\therefore a=2,\ b=1-a=-1$

5、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin^2 x & x\ne 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性、可导性。

连续性：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin^2 x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续

可导性：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\sin^2 x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=1$

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

综上：$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导

2.2　求导法则

要求：熟练掌握导数的基本公式与运算法则，熟练掌握复合函数、隐函数、参数方程求导法则。

1、填空题

(1) $(\cos\frac{1}{x})' =$ $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ ；

(2) $(\frac{1-\ln x}{1+\ln x})' =$ $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$ ；

(3) $[\ln(\cos e^x)]' =$ $-e^x\tan e^x$ ；

(4) $(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}})' =$ $x(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ ；

(5) $f(x)$ 为可导函数，则 $(\frac{1}{f^2(x)})' =$ $-\frac{2f'(x)}{f^3(x)}$ 。

2、计算题

(1) 设 $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$，求 y'。

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

(2) 设 $y=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，求 y'。

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = 0$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

(3) 设 $y=\tan a^x+\arctan x^a \quad (a>0)$，求 y'。

$$y' = \sec a^x \cdot a^x\ln a + \frac{ax^{a-1}}{1+x^{2a}}$$

(4) 设$y=\ln\sin\frac{x}{2}-3^x\ln\cos\sqrt{x}$，求 y'。

$$y' = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} - 3^x\ln 3\ln\cos\sqrt{x} + 3^x\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - 3^x\ln 3\ln\cos\sqrt{x} + \frac{3^x}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x}$$

(5) 设 $y=e^{x^2}f(x^2)$，其中 $f(t)$ 为可导函数，求 y'。

$$y' = 2xe^{x^2}f(x^2) + e^{x^2}f'(x^2)\cdot 2x$$

3、设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$。

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)g(x)-0}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}(x+a)g(x)$$

$$= 2ag(a)$$

4、求由下列方程确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$。

(1) $e^{xy}+\cos(xy)-y^2=0$

$e^{xy}(y+xy')-\sin xy(y+xy')-2y\cdot y'=0$

$ye^{xy}+xe^{xy}\cdot y'-y\sin xy-xy'\sin xy-2y\cdot y'=0$

$y'=\dfrac{ye^{xy}-y\sin xy}{2y+x\sin xy-xe^{xy}}$

(2) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

$\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2y\cdot y')$

$\dfrac{y'x-y}{x^2+y^2}=\dfrac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2}$ $\quad y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

(3) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(2x+1)^2}{x+3}}$

$\ln|y|=\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|2x+1|-\frac{1}{3}\ln|x+3|$

$\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{3(x+3)}$

$y'=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(2x+1)^2}{x+3}}\left(\dfrac{1}{3(x+1)}+\dfrac{4}{3(2x+1)}-\dfrac{1}{3(x+3)}\right)$

(4) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x)$

$\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1+x}$

$y'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$

5、求曲线 $\rho=2\sin 2\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 相应点处法线的直角坐标方程。

$\begin{cases}x=2\sin 2\theta\cos\theta\\ y=2\sin 2\theta\sin\theta\end{cases}$ $\quad y'_x=\dfrac{y'_\theta}{x'_\theta}=\dfrac{-2\sin 2\theta\sin\theta+2\cos 2\theta\cos\theta}{\sin 2\theta\cos\theta+2\cos 2\theta\sin\theta}$

$y'_x|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-1$ ∴法线斜率为 1，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$

∴所求法线方程为 $y-\sqrt{2}=x-\sqrt{2}$，即 $y=x$

6、求下列参数方程所确定函数的导数

(1) $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\frac{6at}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a-3at^2}{(1+t^2)^2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$

(2) 已知 $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}$。

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x'_t}{y'_t}=\dfrac{-\sin t+\sin t+t\cos t}{\cos t-(\cos t-t\sin t)}=\cot t$

$\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{t=\frac{3}{4}\pi}=-1$

2.3 高阶导数及相关变化率

要求：了解高阶导数和相关变化率的概念，会求 n 阶导数。

1、填空题（其中 $f''(x)$ 存在）

(1) $(e^{-x}\sin x)'' =$ $-2e^{-x}\cos x$；(2) $(f(x^2))'' =$ $2f'(x^2)+4x^2 f''(x^2)$

(3) $(\cos^2 2x)^{(n)} =$ $2^{2n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$。

2、计算题

(1) $y = 2x^2 + x|x|$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$y(x)=\begin{cases}3x^2 & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x^2+x^2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x^2-x^2}{x}=0$

$\therefore y'(0)=0 \quad \therefore y'(x)=\begin{cases}6x & x\geq 0\\ 2x & x<0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{6x-0}{x}=6 \quad \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x-0}{x}=2$

$\therefore y'(x)$ 在 0 点不可导

$\therefore y''(x)=\begin{cases}6 & x>0\\ 2 & x<0\end{cases}$

(2) $\sin y + xe^y = 0$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$。

$y'\cos y + xe^y\cdot y' + e^y = 0$

$\therefore y' = \frac{-e^y}{\cos y + xe^y} = \frac{e^y}{\sin y-\cos y}$

$y'' = \frac{e^y\cdot y'(\sin y-\cos y)-e^y(\cos y+\sin y)\cdot y'}{(\sin y-\cos y)^2} = \frac{e^{2y}(\sin y-\cos y)-e^{2y}(\cos y+\sin y)}{(\sin y-\cos y)^3}$

$= \frac{-2e^{2y}\cos y}{(\sin y-\cos y)^3} = \frac{2e^{2y}\cos y}{(\cos y-\sin y)^3}$

(3) $y = x - \ln y$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$y' = 1-\frac{y'}{y}$

$\therefore y' = \frac{1}{1+\frac{1}{y}} = \frac{y}{y+1}$

$y'' = \frac{y'(y+1)-y\cdot y'}{(y+1)^2} = \frac{y'}{(y+1)^2} = \frac{y}{(y+1)^3}$

(4) $\begin{cases}x = a(t-\sin t)\\ y = a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$

$= \frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$

$= -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$

(5) $\begin{cases}x = f'(t)\\ y = tf'(t) - f(t)\end{cases}$，其中 $f(t)$ 具有二阶导数且 $f''(t) \neq 0$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)} = t$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}(t)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f''(t)}$

(6) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $y^{(n)}$。

$y = \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$

$y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}} - (-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$

3、用莱布尼兹公式计算 $(x^2\sin 2x)^{(50)}$。

$(x^2\sin 2x)^{(50)} = 2^{50}\sin(2x+25\pi)x^2 + 50\times 2^{49}\sin\left(2x+\frac{49\pi}{2}\right)\cdot 2x$

$+\frac{50\times 49}{2}\times 2^{48}\sin(2x+24\pi)\cdot 2$

$= -2^{50}x^2\sin 2x + 50\times 2^{50}\cdot x\cos 2x + \frac{25\times 49}{2}\times 2^{50}\sin 2x$

$= 2^{50}\left(50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x - x^2\sin 2x\right)$

2.4　微分

要求：理解微分的概念，了解微分的几何意义及一阶微分形式不变性，熟练掌握微分的基本公式与运算法则。

1、填空题

(1)已知 $y = x^3 - x$,则在 $x = 2$ 处当 $\Delta x = 0.01$ 时 $\Delta y =$ 0.110601；

$dy =$ 0.11 ；

(2) $d($ $-\frac{1}{1+x}+C$ $) = \frac{1}{(1+x)^2}dx$ ； $d($ $2\sqrt{x}+C$ $) = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$；

(3) $d($ $\frac{1}{3}\sin(3x+1)+C$ $) = \cos(3x+1)dx$ 。

2、选择题

(1) 已知 $f(x)$ 可导，若 $y = f(\sin x)$，则 $dy =$ （ A ）

(A) $f'(\sin x)d\sin x$　(B) $f'(\sin x)dx$

(C) $[f(\sin x)]'d\sin x$　(D) 前者均不对

(2) 若 $y = f(x)$，有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$，则当 $\Delta x \to 0$ 时，该函数在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是　$dy=\frac{1}{2}\Delta x$　（ B ）

(A) 与 Δx 等价的无穷小　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

3、求下列函数的微分

(1) $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[x]{3} + \sqrt[3]{3}$

$$dy = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx + 3^{\frac{1}{x}}\ln 3\cdot(-\frac{1}{x^2})dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x^2}3^{\frac{1}{x}}\ln 3)dx$$

(2) $y = \ln\cos\sqrt{x}$

$$dy = \frac{1}{\cos\sqrt{x}}d(\cos\sqrt{x}) = \frac{1}{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})d(\sqrt{x})$$

$$= -\tan\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = -\frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$$

(3) $y = f(1-2x) + \sin(f(x))$ (其中 $f(x)$ 可导)

$$dy = [f'(1-2x)(-2) + \cos(f(x))\cdot f'(x)]dx$$

$$= [f'(x)\cos f(x) - 2f'(1-2x)]dx$$

4、已知由方程 $2y - x = (x-y)\ln(x-y)$ 确定的 y 是 x 的函数，求 dy。

$$2dy - dx = (dx-dy)\ln(x-y) + (x-y)\frac{1}{x-y}(dx-dy)$$

$$2dy - dx = \ln(x-y)dx - \ln(x-y)dy + dx - dy$$

$$dy = \frac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx$$

5、设 $y = \sin(x^2)$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dy}{d(x^2)}$，$\frac{dy}{d(x^3)}$。

$$\frac{dy}{dx} = 2x\cos x^2$$

$$\frac{dy}{d(x^2)} = \cos x^2$$　证: $\frac{dy}{d(x^2)} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d(x^2)} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{d(x^2)}{dx}} = 2x\cos x^2\cdot\frac{1}{2x} = \cos x^2$

$$\frac{dy}{d(x^3)} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d(x^3)} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{d(x^3)}{dx}} = 2x\cos x^2\cdot\frac{1}{3x^2} = \frac{2\cos x^2}{3x}$$

2.5 总习题

1、填空题

(1) 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ <u>-1</u>；

(2) 设 $f'(x_0)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$ <u>$2\sqrt{x_0}\,f'(x_0)$</u>；

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$（$n$ 为正整数），问 n 在什么范围内时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处具有下面的性质：①连续；②可导；③有连续的导数，① <u>$n>0$</u>，② <u>$n>1$</u>，③ <u>$n>2$</u>；

(4) 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=xy^3-1$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a,b 为常数，则 $a=$ <u>-1</u>，$b=$ <u>-1</u>。

(5) $d(\dfrac{\sin x}{x})=$ <u>$\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$</u> $d(x^2)$。

2、选择题

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $x=0$ 是 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 的（ B ）

$f(0)=0$ 　在0处连续　 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

(A) 无穷间断点　　(B) 可去间断点
(C) 连续点　　(D) 振荡间断点

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ \dfrac{a+b\cos x}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则(B)

(A) $a=-2,b=2$　　(B) $a=2,b=-2$
(C) $a=-1,b=1$　　(D) $a=1,b=-1$

(3) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数为(C)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(4) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 n 当为大于等于 2 的整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是（ A ）

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　(C) $[f(x)]^{2n}$　(D) $n![f(x)]^{2n}$

3、计算题

(1) 设 $y=\sin mx\cdot\cos^n x$，求 y'。

$y'=m\cos mx\cdot\cos^n x+\sin mx\cdot n\cos^{n-1}x(-\sin x)$
$=m\cos mx\cdot\cos^n x-n\sin x\sin mx\cos^{n-1}x$

(2) 设 $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$，求 y'。

$y=\frac{1}{6}(2\ln(x+1)-\ln(x^2-x+1))+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$

(3) 设 $y=\sin^2(\dfrac{1-\ln x}{x})$，求 y'。

$y'=2\sin\frac{1-\ln x}{x}\cos\frac{1-\ln x}{x}\cdot\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-(1-\ln x)}{x^2}$

$=\sin\frac{2(1-\ln x)}{x}\cdot\frac{\ln x-2}{x^2}$

(4) 设 $y=\begin{cases}\ln(1+x) & x>0\\ 0 & x=0\\ \frac{1}{x}\sin^2 x & x<0\end{cases}$，求 y'。

$x>0$ 时：$y'=\frac{1}{1+x}$　　$x<0$ 时：$y'=-\frac{1}{x^2}\sin^2x+\frac{2}{x}\sin x\cos x$

$y'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x-0}=1$　　$y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}\sin^2x-0}{x-0}=1$　∴ $y'(0)=1$

∴ $y'=\begin{cases}\frac{1}{1+x} & x>0\\ 1 & x=0\\ \frac{\sin2x}{x}-\frac{\sin^2x}{x^2} & x<0\end{cases}$　　即 $y'=\begin{cases}\frac{1}{1+x} & x\ge0\\ \frac{\sin 2x}{x}-\frac{\sin^2x}{x} & x<0\end{cases}$

(5) 设 $y=\sqrt{x\sin x\cdot\sqrt{1-e^x}}$，求 y'。

$$y'=\frac{\sin x\sqrt{1-e^x}+x\cos x\sqrt{1-e^x}-\frac{e^x}{2\sqrt{1-e^x}}x\sin x}{2\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}}$$

(6) 设 $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$，其中 $\varphi(x),\psi(x)$ 为可导函数，求 y'。

$y=\psi(x)^{\frac{1}{\varphi(x)}}$　　$\ln y=\frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x)$

$\frac{y'}{y}=\frac{-\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}\ln\psi(x)+\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$

∴ $y'=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\cdot\frac{\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)\psi(x)}$

(7) 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 所确定，求 y'。

$y\ln x=x\ln y$

$y'\ln x+y\cdot\frac1x=\ln y+x\frac{y'}{y}$

$y'=\frac{\frac yx-\ln y}{\frac xy-\ln x}$

(8) 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$。

$e^y\cdot y'+y+xy'=0\Rightarrow y'=-\frac{y}{e^y+x}$

$y''=-\frac{y'(e^y+x)-y(1+e^y\cdot y')}{(x+e^y)^2}$　　当 $x=0$ 时，$y=1$，∴ $y'(0)=-\frac1e$

∴ $y''(0)=\frac{1}{e^2}$

(9) 设 $\begin{cases}x=2te^t+1\\y=t^3-3t\end{cases}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$。

$\frac{dy}{dx}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{3t^2-3}{2te^t+2e^t}=\frac32\cdot\frac{t-1}{e^t}$　　$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=0$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac32\cdot\frac{t-1}{e^t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac32\cdot\frac{e^t-(t-1)e^t}{e^{2t}}\cdot\frac{1}{2te^t+2e^t}$

$=\frac32\cdot\frac{2-t}{e^t}\cdot\frac{1}{2e^t(t+1)}$

∴ $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\frac{3}{8e^2}$

(10) 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\y=t-\arctan t\end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2-1}{2t}=\frac t2$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac t2\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac12\cdot\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$

(11) 设 $y=\frac{5-x^2}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$。

$y=\frac{4+1-x^2}{x^2-1}=\frac{4}{x^2-1}-1=2\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-1$

$y^{(n)}=2\left[(-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}-(-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$

$=2\cdot(-1)^n\cdot n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$

(12) 设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$。

$y=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x$

$y^{(n)}=\frac{1}{4}\cdot4^n\cos(4x+\frac{n\pi}{2})=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})$

(13) 设 $y=a+\ln(xy)+e^{x+y}$，求 dy。

$$dy=\frac{y+xye^{x+y}}{xy-x-xye^{x+y}}dx$$

4、试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出 $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$。

$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}(\frac{dx}{dy})=\frac{d}{dy}(\frac{1}{y'})=-\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{dx}{dy}$

$=-\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}$

5、求证 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点处的切线在两坐标轴上的截距之和为常数 a。

先求 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点 (x,y) 处切线的斜率 y'

$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

∴过该点的切线方程为：$Y-y=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(X-x)$

令 $X=0$，得纵截距：$Y=\sqrt{xy}+y$

令 $Y=0$，得横截距：$X=\sqrt{xy}+x$

∴ $X+Y=2\sqrt{xy}+x+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=a$

∴ $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上任一点处的切线在两坐标轴上的截距之和为常数 a.

6、设函数 $f(x)$ 在 $x\le1$ 时具有二阶导数，求 a,b,c 使

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & x\le1\\ a(x-1)^2+b(x-1)+c & x>1\end{cases}$$ 在 $x=1$ 处具有二阶导数。

∵ $F(1+)=F(1-)=F(1)$ ∴ $f(1)=c$

又∵ $F'_-(1)=F'_+(1)$，即 $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-f(1)}{x-1}=b$ ∴ $b=f'_-(1)$

又∵ $F''_-(1)=F''_+(1)$ ∴ $f''_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2a(x-1)+b-b}{x-1}=2a$ ∴ $a=\frac{1}{2}f''_-(1)$

7、设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}$。

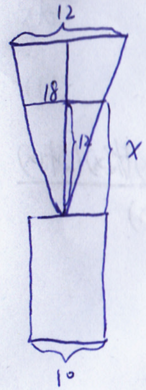
∵ $y=\sin x$ 在0处的导数为 $\cos x|_{x=0}=1$

∴ $f'(0)=1$　又 $f(0)=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{f(\frac{2}{n})}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2}\cdot f'(0)$

$=\sqrt{2}$

8、溶液自深 18cm，顶部直径为 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中，开始时漏斗中盛满了溶液，已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时，其表面下降的速率为 1cm/min，问此时圆柱形筒溶液表面上升的速率为多少？



设漏斗中空出的体积，即圆柱筒中溶液的体积为 $V(t)$

漏斗中液面高度为 $x(t)$

则 t 时刻：$V=\frac{1}{3}\pi(\frac{12}{2})^2\times18-\frac{1}{3}\pi(\frac{x}{18}\times\frac{12}{2})^2\cdot x(t)$

$=\frac{1}{3}\pi\times36\times(18-\frac{x^2}{18})$

则漏斗中空中的体积的时间变化率

$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}\pi\times36\times(-\frac{x}{9})\cdot\frac{dx}{dt}$

当 $x(t)=9cm$，$\frac{dx}{dt}=1cm/min$ 时，则 $\frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}\pi\times36\times(-\frac{4}{3})=-16\pi$

∴圆柱筒内溶液上升速度为 $\frac{16\pi}{(\frac{10}{2})^2\pi}=\frac{16}{25}$ (cm/min)

第 3 章　微分中值定理与导数的应用

3.1　微分中值定理

要求：理解并会用罗尔、拉格朗日定理，了解并会用柯西定理。

1、填空题

(1) $f(x)=\ln\sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上是否满足罗尔定理的条件 __是__；有无定理中的数值 ξ？ __$\frac{\pi}{2}$__（有则写出其值）。

(2) 已知 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$，那么 $f'(x)=0$ 有 __4__ 个根，根所在的区间分别为 __$(-2,-1)(-1,0)(0,1)(1,2)$__。

2、选择题

(1) 罗尔定理的三个条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$ 的　　(B)

(A) 必要条件　　(B) 充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

(2) 函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\cos x$ 在 $[-1,1]$ 上不满足罗尔定理是因为(B)

(A) 在 $[-1,1]$ 上不连续　　(B) 在 $(-1,1)$ 内有不可导点

(C) $f(1)\neq f(-1)$　　(D) 以上三条都不对

3、设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(a)=0$，证明：存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

4、若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一正根 $x=x_0$，证明：方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根。

令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$

$f(0)=f(x_0)=0$

又 $\because f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，$(0,x_0)$ 上可导

$\therefore f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上满足 Rolle Th

$\therefore$ 至少存在一个 $\xi\in(0,x_0)$ 使得 $f'(\xi)=0$

即方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

5、设 $a>b>0, n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$。

设 $f(x)=x^n$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足 Lagrange Th.

$\therefore$ 至少存在一点 $\xi\in(b,a)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

即 $n\xi^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b}$　$\xi\in(b,a)$

又 $\because nb^{n-1}<n\xi^{n-1}<na^{n-1}$

$\therefore nb^{n-1}<\frac{a^n-b^n}{a-b}<na^{n-1}$　即 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

6、设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试利用柯西中值定理证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

设 $F(x)=\ln x$，则 $f(x), F(x)$ 在 $[a,b]$ 满足 Cauchy 中值 Th.

$\therefore \frac{f(a)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$　$\xi\in(a,b)$

即 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

别法．设 $F(x)=\ln\frac{x}{a}$

3.2 洛必达法则

要求：熟练掌握用洛必达法则。

1、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$，则 $a=$ <u>-1</u>，$b=$ <u>-4</u>；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=$ <u>1</u>。

2、求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

或：$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(x+1)}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x\sin x-\cos x}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\tan x\ln\frac{1}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}2x}=e^0=1$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}}$$

$$=e^0=1$$

姓名　　　　班级　　　　学号

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$

$$\underline{\underline{x=\frac{\pi}{2}-t}}\ \lim_{t\to0}\frac{\ln\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{4t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\cos t}{4t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\cos t}\cdot\sin t}{8t}\cdot(-1)=-\frac{1}{8}$$

另法：原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{2(\pi-2x)(-2)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{4(2x-\pi)}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{8}=-\frac{1}{8}$$

3、设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有二阶导数 $f''(x_0)$，

证明：$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$。

左边 $=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h}+\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)$$

$$=f''(x_0)$$

3.3　泰勒公式

要求： 理解泰勒定理，知道 $[e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^\alpha]$ 的麦克劳林展开式。

1、求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 展开的带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式。

$f(-1)=-1$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$　　$f^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$

$f^{(n)}(-1)=(-1)^n\dfrac{n!}{(-1)^{n+1}}=-n!$

$f(x)=-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$

(ξ 在 x, -1 之间)

2、求函数 $f(x)=xe^{-x}$ 的带佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+o(x^{n-1})$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+o(x^{n-1})$$

$$xe^{-x}=x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n)$$

3、计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left[1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$=-\frac{1}{12}$$

3.4 函数的单调性和极值

要求：掌握函数单调性的判断方法，理解函数的极值概念，掌握求函数极值和最值的方法。

1、设 $y=x^2e^{-x}$，则其单减区间 $(-\infty,0)(2,+\infty)$。

2、选择题

(1) 下列命题正确的是 （ C ）

(*A*) 凡是驻点就是极值点 (*B*) 凡是极值点就是驻点

(*C*) 可导函数的极值点必是它的驻点

(*D*) 函数的极值点一定是最值点

(2) 函数 $f(x)=x^3+2x+q$ 的零点的个数为 （ A ）

(*A*) 1 (*B*) 2 (*C*) 3 (*D*) 个数与 q 有关

3、确定下列函数的单调区间

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$

$y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$

令 $y'=0$ 得 $x_1=3$，$x_2=-1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

∴单增区间 $(-\infty,-1),(3,+\infty)$

单减区间 $(-1,3)$

(2) $y=x^x(x>0)$

$\ln y=x\ln x$

$\frac{y'}{y}=\ln x+1$

$\therefore y'=x^x(\ln x+1)$

令 $y'=0$，得 $x=e^{-1}$

x	$(0,e^{-1})$	e^{-1}	$(e^{-1},+\infty)$
y'	−	0	+
y	↘		↗

∴ 单增区间 $(e^{-1},+\infty)$

单减区间 $(0,e^{-1})$

4、求函数 $y=(x-4)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值。

$y'=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-4)\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{x+1+\frac{2}{3}(x-4)}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}$

得驻点 $x_1=1$ 和不可导点 $x_2=-1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	∞	−	0	+
y	↗	0	↘	极小	↗

$x=-1$ 是极大值点，极大值 $y(-1)=0$

$x=1$ 是极小值点，极小值 $y(1)=-3\sqrt[3]{4}$

5、设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3-ax^2y^2+by^3=0$ 确定，且 $y(1)=1$，$x=1$ 是驻点，求 a,b 的值。

$3x^2-2axy^2-2ax^2y\cdot y'+3by^2y'=0$ ——(1)

∵ $x=1$ 是驻点 ∴ $y'(1)=0$，又 $y(1)=1$ 都代入原方程及(1)式得

$$\begin{cases}1-a+b=0\\3-2a=0\end{cases}$$

$\therefore a=\frac{3}{2}\quad b=\frac{1}{2}$

6、当 $x>0$ 时，证明：$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$。

令 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{\arctan x}{1+x}$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x)-\arctan x}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)\frac{x^2}{1+x^2}+\arctan x}{(1+x)^2}>0\ (x>0)$

又∵ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续

$\therefore f(x)>f(0)\quad(x>0)$

$\therefore \ln(1+x)-\frac{\arctan x}{1+x}>f(0)=0$

即 $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$

7、讨论方程 $\ln x = ax \quad (a>0)$ 的实根个数。

令 $f(x)=\ln x - ax$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{a}$

x	$(0,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	e	↘

∴ $x=\frac{1}{a}$ 是 $f(x)$ 的极大值点

∵ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

∴ 若 $f(\frac{1}{a})>0$，则 $f(x)=0$ 有两个实根

…… $=0$ …… 一个……

<0 …… 没有……

即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$\ln x=ax$ 有两个实根

$a=\frac{1}{e}$ 时，…… 一个……

$a>\frac{1}{e}$ …… 没有……

8、求函数 $f(x)=x^3+x^2-8x-5$ 在 $[-4,1]$ 上的最大值、最小值。

$f'(x)=3x^2+2x-8$

令 $f'(x)=0$，则 $x_1=-2$，$x_2=\frac{4}{3}$

$f(-2)=7$，$f(\frac{4}{3})=-\frac{211}{27}$，$f(-4)=-21$，$f(1)=-11$

∴ $\max f(x)=f(-2)=7$

$\min f(x)=f(-4)=-21$

9、问函数 $f(x)=x^2-\frac{54}{x}(x<0)$ 在何处取得最小值？

$f'(x)=2x+\frac{54}{x^2}=\frac{2x^3+54}{x^3}$　令 $f'(x)=0$ 得 $x=-3$

在 $x=-3$ 左右两侧 $f'(x)$ 的符号分别为 −，+

∴ $x=-3$ 是 $(-\infty,0)$ 上唯一极小值点

∴ $f(x)$ 在 $x=-3$ 处取得最小值.

10、要造一圆柱形油罐，体积为 V，求底半径 r 和高 h 各为多少时，才能使表面积最小？

$S=2\pi r^2+2\pi rh$

又 ∵ $V=\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$

∴ $S=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}$

$=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$

$S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$　令 $S'(r)=0$ 得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

∴ 当 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，表面积最小

3.5 函数图形的描绘

要求：掌握曲线凹凸性的判断方法，会求曲线的拐点与渐近线；

1、 曲线 $y=4-\sqrt[3]{x-1}$ 的拐点是 $(1,4)$ 。

2、选择题

(1) 若 $f(-x)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内 （ C ）

(A) $f(x)$ 单调增加且图象凸 (B) $f(x)$ 单调增加且图象凹

(C) $f(x)$ 单调减少且图象凸 (D) $f(x)$ 单调减少且图象凹

(2) 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则当 $\Delta x>0$ 时，有 （ A ）

(A) $\Delta y>dy>0$ (B) $\Delta y<dy<0$

(C) $dy>\Delta y>0$ (D) $dy<\Delta y<0$

3、求 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的拐点及凹凸区间

$y'=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ $y''=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$

令 $y''=0$，则 $x=\pm1$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凹	$e^{-\frac{1}{2}}$	凸	$e^{-\frac{1}{2}}$	凹

凹区间 $(-\infty,-1)(1,+\infty)$

凸区间 $(-1,1)$

拐点 $(\pm1,e^{-\frac{1}{2}})$

4、问 a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点。

$3=a+b$

$y'=3ax^2+2bx$ $y''=6ax+2b$

$(1,3)$ 为拐点. $\therefore y''(1)=0$ 即 $6a+2b=0$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$ $b=\frac{9}{2}$

5、求函数 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 的渐近线方程。

$\lim\limits_{x\to-e^{-1}} x\ln(e+\frac{1}{x})=\infty$

$\therefore x=-e^{-1}$ 是函数的垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln(e+\frac{1}{x})-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(e+\frac{1}{x})-1)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{e}$

$\therefore y=x+\frac{1}{e}$ 是函数的斜渐近线

6、描绘函数 $y=e^{-(x-1)^2}$ 的图形

① 定义域 R

② $y'=e^{-(x-1)^2}(-2x+2)$ 令 $y'=0$. 得 $x=1$

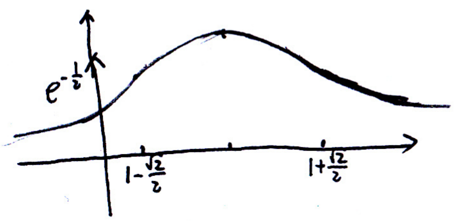
$y''=e^{-(x-1)^2}\cdot2(2x^2-4x+1)$ 令 $y''=0$. 得 $x=1\pm\frac{\sqrt2}{2}$

③ 列表

x	$(-\infty,1-\frac{\sqrt2}{2})$	$1-\frac{\sqrt2}{2}$	$(1-\frac{\sqrt2}{2},1)$	1	$(1,1+\frac{\sqrt2}{2})$	$1+\frac{\sqrt2}{2}$	$(1+\frac{\sqrt2}{2},+\infty)$
y'	$+$		$+$	0	$-$	0	$-$
y''	$+$	0	$-$		$-$		$+$
y	↗	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	↗	1 极大	↘	$e^{-\frac{1}{2}}$ 拐点	↘

④ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0$ $\therefore y=0$ 为水平渐近线

⑤



3.6　总习题

1、填空题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+a\cos x-b\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，则 $a=$ <u>-1</u>，$b=$ <u>0</u>；

(2) 设 $y=(ax)^3-(ax)^2-ax-a$ 在 $x=1$ 处取极小值，则 $a=$ <u>1</u>；

$y'=3a^3x^2-2a^2x-a \qquad y''=6a^3x-2a^2$

$\left.\begin{array}{l} y'(1)=3a^3-2a^2-a=0 \\ y''(1)=6a^3-2a^2>0 \end{array}\right\} a=1$

2、选择题

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处为二阶可导函数，则

$$\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}=$$ （ A ）

(A) $\dfrac{f''(a)}{2}$　(B) $f''(a)$　(C) $2f''(a)$　(D) $-f''(a)$

(2) 函数 $y=6x+\dfrac{3}{x}-x^3$ 在 $x=1$ 处有 （ C ）

$y'=6-\frac{3}{x^2}-3x^2=\frac{3}{x^2}(1-x^4)$ $x=1$两侧同号

$y''=\frac{6}{x^3}-6x=6x(\frac{1}{x^4}-1)$ $x=1$两侧异号

$y'(1)=0$

$y''(1)=0$

(A) 极小值　(B) 极大值

(C) 拐点　(D) 既无拐点又无极值

(3) 已知 $f(x)$ 在 $U(0,\delta)$ 内有定义，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=a$，$(a>0)$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点 （ D ）

(A) 不可导　(B) 可导且 $f'(0)\neq0$　(C) 取极大值　(D) 取极小值

(4) 已知方程 $x^2y^2+y=1$ $(y>0)$ 确定 y 是 x 的函数，则（ B ）

(A) $y(x)$ 有极小值，但无极大值

(B) $y(x)$ 有极大值，但无极小值

(C) $y(x)$ 既有极大值又有极小值

(D) $y(x)$ 无极值

$2xy^2+2yy'x^2+y'=0$

$\therefore y'=\dfrac{-2xy^2}{2x^2y+1}$

$y>0$

$\therefore x>0$ $y'<0$.

$x<0$. $y'>0$

(5) 设在 $[0,1]$ 上，$f''(x)>0$ 则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 （ B ）

$f(1)-f(0)=f'(\xi)\cdot1$

$\because f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(6) 设 $f(x)$ 在 $U(0,\delta)$ 内具有连续的二阶导数，$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{\sqrt[3]{x}}=a$ $(a<0)$，则 （ C ）

$\to f''(0)=0$. 且两侧$f''(x)$异号

(A) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(7) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

3、求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$ 洛必达

令 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$　　$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x)$　　$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}$

$\therefore y'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right)$

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right)-0}{1}=\lim\limits_{x\to0}e\cdot\dfrac{-(1+x)\ln(1+x)+x}{x^2(1+x)}$

$=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln(1+x)}{2x(1+x)+x^2}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{1+x}}{2(1+x)+2x+2x}=-\frac{1}{2}e$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{2}{\pi}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$= e^{-\frac{2}{\pi}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4+o(x^4)\right)}{\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2)\right)\cdot x^2}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}$

(4) 设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$， $f''(0)=2$，

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$。

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\frac{f(x)}{x}=0\cdot1=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{2x}$ —① $=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}$ ~~$=\frac{1}{2}f''(0)=1$~~ X

又 $\because \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot\frac{1}{2}=f''(0)\cdot\frac{1}{2}=1$ —②

$\therefore$ 综上①② $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-x}{x^2}=1$

4、确定 a,b 使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to0$ 时为 x 的 5 阶无穷小量。

$f(x)=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x$

$=x-a\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-\frac{b}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{6}+\frac{(2x)^5}{120}+o(x^5)\right)$

$=(1-a-b)x+\left[\frac{a}{6}+\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{2^3}{6}\right)\right]x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{b}{2}\cdot\frac{2^5}{120}\right)x^5+o(x^5)$

$\therefore \begin{cases}1-a-b=0\\ \frac{a}{6}+\frac{2}{3}b=0\end{cases}$

$\therefore a=\frac{4}{3}\quad b=-\frac{1}{3}$

5、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，证明：必有一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$ 成立。

令 $F(x)=f(x)-x$

则 $F(1)=f(1)-1=0-1=-1<0$

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$

$\therefore F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上满足零点 Th.

$\therefore F(\eta)=0\quad \eta\in(\frac{1}{2},1)$

又 $\because F(0)=f(0)-0=0$

$\therefore F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足 Rolle 中值 Th

$\therefore \exists$ 一点 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=f'(\xi)-1=0$，即 $f'(\xi)=1$

6、设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内有一点 ξ，使 $\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$。

分析：要证上式，即要证 $\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{b-a} = f(a)g'(\xi)-g(a)f'(\xi)$

令 $F(x)=f(a)g(x)-g(a)f(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足Lagrange中值Th

∴存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)$

即 $\frac{(f(a)g(b)-g(a)f(b))-(f(a)g(a)-f(a)g(a))}{b-a} = f(a)g'(\xi)-g(a)f'(\xi)$ 即 $\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{b-a} = f(a)g'(\xi)-g(a)f'(\xi)$

7、函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导（$0\le a<b$），

试证：在区间 (a,b) 内存 ξ,η，在使得 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

分析：要证上式，即要证 $\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$

∵ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足Lagrange中值Th

∴ $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ $\quad \xi\in(a,b)$

又∵ $f(x)$，x^2 在 $[a,b]$ 上满足Cauchy中值Th

∴ $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$ $\quad \eta\in(a,b)$ $\quad$ ∴ $\frac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$ $\quad \xi,\eta\in(a,b)$

8、设在 $[0,1]$ 上 $|f''(x)|\le M$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，

证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\le M$。

设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的 x_0 点取得最大值，则一定为极大值.

又∵ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导

∴ $f'(x)$ 必存在，且 $f'(x_0)=0$

将 $f'(x)$ 在 x_0 点0阶泰勒展开：$f'(x)=f'(x_0)+f''(\xi)(x-x_0)$

$=f''(\xi)(x-x_0)$ $\quad \xi$介于x_0，x之间

∴ $f'(0)=f''(\xi)(-x_0)$ $\quad f'(1)=f''(\xi)(1-x_0)$

∴ $|f'(0)|+|f'(1)|=|f''(\xi)||-x_0|+|f''(\xi)||1-x_0|=|f''(\xi)|\le M$

9、求 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k\ (k>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数。

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$ $\quad$ ∴ $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$

$x>e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$

又∵ $f(0+)=f(+\infty)=-\infty$

∴ $f(e)=k>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点

10、(1) 证明：$\tan x+2\sin x>3x$ $\quad (0<x<\frac{\pi}{2})$。两次单调性

令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$

$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3$ $\quad f''(x)=2\sec^2 x\tan x-2\sin x$

$=2\sin x(\frac{1}{\cos^3 x}-1)>0$ $\quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

∴ $f'(x)$ 在 $(0,x)$ 单增 ∴ $f'(x)>f'(0)=0$ ∴ $f(x)$ 在 $(0,x)$ 单增

∴ $f(x)>f(0)=0$ ∴ $f(x)>0$

即 $\tan x+2\sin x>3x$

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，恒正、可导，且满足不等式 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，证明：$f(x)g(b)>f(b)g(x)$。

令 $\varphi(x)=f(x)g(b)-f(b)g(x)$ $\quad$ 显然 $\varphi(b)=0$

$\varphi'(x)=f'(x)g(b)-f(b)g'(x)<0$

∴ $\varphi(x)$ 单减

∴对 $\forall x\in(a,b)$，$\varphi(x)>\varphi(b)=0$ $\quad$ 即 $\varphi(x)>0$

即 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$

(3) 证明：当 $-\infty < x < +\infty$ 时，$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \ge \sqrt{1+x^2}$。

令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 且 $f(0)=0$

$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$，$\therefore f(x)>f(0)=0$

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$ $f(x)>f(0)=0$

$\therefore$ 综上 $-\infty<x<+\infty$ 时，都有

$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ge\sqrt{1+x^2}$

11、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二次可导，且有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3}=1$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$。

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x\left(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)\right)}{x^3}=1$$

即 $$\lim_{x\to0}\frac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+\left(\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)}{x^3}=1$$

$\therefore \begin{cases}1+f(0)=0\\ f'(0)=0\\ \frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{6}=1\end{cases}$ $\therefore f(0)=-1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=\frac{7}{3}$

12、求 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, x>0\\ x+2, x\le0\end{cases}$ 的极值

$\lim\limits_{x\to0^-}(x+2)=2$ $\lim\limits_{x\to0^+}x^{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}2x\ln x}=e^0=1$

$\therefore$ 0点不连续，不可导

$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1) & x>0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{e}$ 是唯一驻点.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$(\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$	$\nearrow$

$\therefore$ 极大值 $f(0)=2$，极小值 $f(\frac{1}{e})=(\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$

13、求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大值项。

设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ $(x\ge1)$

$f'(x)=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$ 令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$

x	$[1,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$

$\because f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 只有唯一极大点 $x=e$，因此在 $x=e$ 处 $f(x)$ 也取最大值.

又 $\because 2<e<3$，且 $\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$ $\therefore \sqrt[3]{3}$ 为 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大项

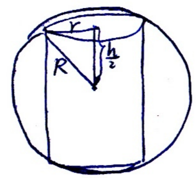
14、已知圆柱体内接于半径为 R 的球，求体积为最大的圆柱体的高。

$V=\pi r^2h=\pi h(R^2-\frac{h^2}{4})$ $(0<h<2R)$

$=\pi R^2h-\frac{\pi}{4}h^3$

$V'(h)=\pi R^2-\frac{3}{4}\pi h^2$ 令 $V'(h)=0$

得 $h=\frac{2}{\sqrt{3}}R$ 是唯一驻点



$\therefore$ 当圆柱体高为 $\frac{2}{\sqrt{3}}R$ 时体积最大

15、求 $y=x+\frac{2x}{x^2-1}$ 的凹凸区间及拐点，渐近线方程。

$y'=1+\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}=1-2\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

$y''=-2\cdot\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}=\frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y	凸		凹	0 拐点	凸		凹

$\lim\limits_{x\to\pm1}y=\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{x^3+x}{x^2-1}=\infty$ $\therefore y$ 有垂直渐近线 $x=\pm1$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\frac{2}{x^2-1}=1=k$ $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0=b$

$\therefore y$ 有斜渐近线 $y=x$

第 4 章　不定积分

4.1　不定积分的概念与性质

要求：理解原函数、不定积分的概念与性质，熟记基本积分公式。

1、已知 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2 x$，$g(x)=-\dfrac{1}{4}\cos 2x$，$h(x)=-\dfrac{1}{2}\cos^2 x$，

试问 $f(x)$ ，$g(x)$ ，$h(x)$ 是同一函数的原函数吗？

$g(x)=-\frac{1}{4}(1-2\sin^2x) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x$

$h(x)=-\frac{1}{2}(1-\sin^2x) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2x$

$\therefore f(x), g(x), h(x)$ 只相差一个常数　$\therefore$ 是同一函数的原函数

2、设 $F(x)$是 $f(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数，且$F(0)=\dfrac{\pi}{2}$，求 $F(x)$。

$F(x)=-\arctan x+C$　且 $F(0)=\frac{\pi}{2}$

$\therefore -\arctan 0+C=\frac{\pi}{2}$　　$\therefore C=\frac{\pi}{2}$

$\therefore F(x)=-\arctan x+\frac{\pi}{2}$

3、计算下列不定积分

(1) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})dx$

$=\int(x^{\frac{3}{2}}-1+x-x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x+\frac{1}{2}x-2x^{\frac{1}{2}}+C$

(2) $\int e^x(1-\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$=\int(e^x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$

$=e^x-\arcsin x+C$

(3) $\int(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2})^2 dx$

$=\int(1-\sin x)\,dx$

$=x+\cos x+C$

(4) $\int\dfrac{1}{1+\cos 2x}dx$

$=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx$

$=\frac{1}{2}\tan x+C$

4、一曲线通过点$(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程。

设曲线为 $y=y(x)$

$y'=\frac{1}{x}$

$y=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

又$\because$ 曲线过点$(e^2,3)$

$\therefore 3=2+C$　　$\therefore C=1$

$\therefore$ 曲线方程为：$y=\ln|x|+1$

4.2 换元积分法

要求：熟练掌握不定积分的两类换元法。

4.2.1 第一类换元法

1、填空题

(1) $\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx=$ $\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$；

(2) $\int\frac{1}{(2x-3)^2}dx=$ $-\frac{1}{2}(2x-3)^{-1}+C$；

(3) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=$ $2\sin\sqrt{x}+C$；

(4) $\int\frac{\sin x}{4+\cos x}dx=$ $-\ln(4+\cos x)+C$；

(5) $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx=$ $\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$；

(6) $\int\frac{1}{9+4x^2}dx=$ $\frac{1}{6}\arctan(\frac{2}{3}x)+C$；

(7) $\int\frac{e^x}{2+e^x}dx=$ $\ln(2+e^x)+C$；

(8) $\int\frac{(\arctan x)^3}{1+x^2}dx=$ $\frac{1}{4}(\arctan x)^4+C$；

(9) $\int x\sqrt{1-x^2}dx=$ $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$；

(10)已知 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int e^{-x}f(e^{-x})dx=$ $-F(e^{-x})+C$。

2、计算下列不定积分

(1) $\int\frac{1-x}{\sqrt{4-9x^2}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}dx-\int\frac{x}{\sqrt{4-9x^2}}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d3x}{\sqrt{2^2-(3x)^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{4-9x^2}}$

$=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+\frac{1}{9}(4-9x^2)^{\frac{1}{2}}+C$

(2) $\int\frac{x^3}{4+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+4-4}{4+x^2}dx^2$

$=\frac{1}{2}(\int dx^2-\int\frac{4}{4+x^2}d(x^2+4))$

$=\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)+C$

(3) $\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx$

$=\int\frac{2}{\sin 2x}dx=\ln|\csc 2x-\cot 2x|+C$

方一：$=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}=\int(\tan x+\cot x)dx=-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|+C=\ln|\tan x|+C$

方二：$=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x\cos^2x}=\int\frac{d\tan x}{\tan x}=\ln|\tan x|+C$

(4) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$

$=\int\frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2}$

$=-\frac{1}{x\ln x}+C$

4.2.2　第二类换元法

计算下列不定积分

1、$\int\frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$

令 $t=\sqrt{2x}$，$x=\frac{t^2}{2}$，$dx=tdt$

∴原式 $=\int\frac{t}{1+t}dt=\int(1-\frac{1}{t+1})dt=t+\ln(t+1)+C$

$=\sqrt{2x}-\ln(\sqrt{2x}+1)+C$

2、$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $x=\sin t$，则 $dx=\cos t\,dt$

$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt$

$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$

3、$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

令 $x=2\sec t$，则 $dx=2\sec t\tan t\,dt$

$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx=\int\frac{2\tan t}{2\sec t}\cdot 2\sec t\tan t\,dt=\int 2(\sec^2 t-1)dt$

$=2\tan t-2t+C$

$=\sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C$

4、$\int\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

令 $x=\sin t\,dt$，$dx=\cos t\,dt$

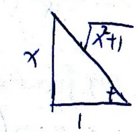
$\int\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{1}{1+\cos t}\cdot\cos t\,dt=\int\frac{1+\cos t-1}{1+\cos t}dt=\int(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}})dt$

$=t-\int\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}d\frac{t}{2}=t-\tan\frac{t}{2}+C=\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$

5、$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}dx$

令 $x=\tan t$，则 $dx=\sec^2 t\,dt$

原式 $=\int\frac{1}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,dt=\int\cos t\,dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$



6、$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

原式 $=\int\frac{t^2}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})dt=-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}$

$=\sqrt{1-t^2}+C=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+C$

4.3 分部积分法

要求：熟练掌握不定积分的分部积分法。

1、计算下列不定积分

(1) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$

$= -2\int x\,d\cos\frac{x}{2} = -2(x\cos\frac{x}{2} - \int\cos\frac{x}{2}dx)$

$= -2x\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + C$

(2) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$ $= -\int\ln x\,d\frac{1}{x}$

$= -(\frac{1}{x}\ln x - \int\frac{1}{x^2}dx)$

$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$

(3) $\int\cos(\ln x)dx$

$= x\cos\ln x + \int\sin\ln x\,dx$

$= x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int\cos\ln x\,dx$

$\therefore$ 原式 $= \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$

(4) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ 令 $\sqrt{x} = t$，则 $x = t^2$，$dx = 2tdt$

$= \int e^t\cdot 2tdt = 2\int t\,de^t = 2(te^t - \int e^t dt)$

$= 2te^t - 2e^t + C$

$= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$

(5) $\int\arcsin x dx$

$= x\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(6) $\int x\tan^2 xdx$

$= \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int x\sec^2 x dx - \int x dx$

$= \int x\,d\tan x - \frac{1}{2}x^2 = x\tan x - \int\tan x dx - \frac{1}{2}x^2$

$= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + C$

(7) $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$

$= -\int\ln(\sin x)d\cot x$

$= -(\cot x\ln\sin x - \int\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cot x)dx$

$= -\cot x\ln\sin x + \int(\csc^2 x - 1)dx$

$= -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C$

2、 已知 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int xf'(x)dx$。

$\int xf'(x)dx$

$= \int x\,df(x)$

$= xf(x) - \int f(x)dx$

$= xf(x) - e^x + C$

$= xe^x - e^x + C$

4.4　有理函数和可化为有理函数的积分

要求： 会计算有理函数、三角函数有理式及简单无理函数的积分。

计算下列不定积分

1、$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x}dx$

$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} = x^2+x+1+\frac{x^2+x-8}{x^3-x} = x^2+x+1+\frac{8}{x}+\frac{-3}{x-1}+\frac{-4}{x+1}$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-3\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C$

2、$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx$

$= \int \left(\frac{-1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$

$= -\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

3、$\int \frac{1}{x(6+x^8)}dx$ 三种凑微分法，倒代换

$= \int \frac{1}{x^9(6x^{-8}+1)}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{dx^{-8}}{6x^{-8}+1} = -\frac{1}{48}\int \frac{d(6x^{-8}+1)}{6x^{-8}+1}$

$= -\frac{1}{48}\ln(6x^{-8}+1)+C$ 或 $= \frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{48}\ln(6+x^8)+C$

4、$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx$

原式 $= \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)\sin^2 x}dx \xlongequal{令 t=\cos x} \int \frac{1}{(2+t)(t^2-1)}dt$

$= \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{2+t}+\frac{\frac{1}{6}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right)dt = \frac{1}{3}\ln|t+2|+\frac{1}{6}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+C$

$= \frac{1}{3}\ln(\cos x+2)+\frac{1}{6}\ln(1-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(\cos x+1)+C$

5、$\int \frac{1}{3+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{3(\sin^2 x+\cos^2 x)+\sin^2 x}dx$

$= \int \frac{\sec^2 x}{3+4\tan^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\,2\tan x}{3+4\tan^2 x}$

$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C$

6、$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$

$\xlongequal{令 t=\sqrt[6]{x}} \int \frac{t^2}{t^6(t^3+t^2)}\cdot 6t^5dt = 6\int \frac{1}{t(t+1)}dt$

$= 6(\ln|t|-\ln|t+1|)+C$

$= 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}+C$

4.5 总习题

1、填空题

(1) 若 $f(x)$ 的原函数为 $\sin x$，则 $\int f'(x)dx=$ $\underline{\cos x+C}$；

(2) 设 $f'(\ln x)=1+x$, 则 $f(x)=$ $\underline{x+e^x+C}$； $f'(x)=1+e^x$

(3) $\frac{d}{dx}[\int f(3x)dx]=$ $\underline{f(3x)}$。

2、选择题

(1) 已知 $\int f(x)dx=F(x)+C$，则 $\int xf(1-x^2)dx=$ （ C ）

(A) $F(1-x^2)+C$ (B) $\frac{1}{2}F(1-x^2)+C$

(C) $-\frac{1}{2}F(1-x^2)+C$ (D) $-F(1-x^2)+C$

(2) 设 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)dx$ （ B ）

(A) $e^x(1-x)+C$ (B) $e^x(x-1)+C$

(C) $e^x(1+x)+C$ (D) $-e^x(1+x)+C$

(3) 已知 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{1}{f(x)}dx$ （ D ）

(A) $\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$ (B) $\sqrt{(1-x^2)^3}+C$

(C) $-\sqrt{(1-x^2)^3}+C$ (D) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$

3、计算下列不定积分

(1) $\int e^{3x^2+\ln x}dx$

$=\int xe^{3x^2}dx$

$=\frac{1}{6}e^{3x^2}+C$

(2) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

$=\int\frac{\frac{1}{2}d\sin 2x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x}$

$=-\frac{2}{\sin 2x}+C$

(3) $\int\frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx$

$=\int\frac{\ln\tan x}{2\sin x\cos x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{2\cdot\tan x\cos^2 x}dx$

$=\int\frac{\ln\tan x}{2\tan x}d\tan x=\frac{1}{2}\int\ln\tan x\, d\ln\tan x=\frac{1}{4}(\ln\tan x)^2+C$

(4) $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx$

$=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-6)+8}{x^2-6x+13}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4}$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+13|+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$

(5) $\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$ 令 $t=\sqrt[4]{x}$，则 $x=t^4$，$dx=4t^3dt$

$=\int\frac{4t^3}{t^2+t}dt=4\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt$

$=4\int(t-1)dt+4\int\frac{1}{t+1}dt$

$=2t^2-4t+4\ln|t+1|+C$

$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$

(6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

$= \int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{1}{1+x^2-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

$= \int \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}d\sqrt{x^2-1} = \arctan\sqrt{x^2-1} + C$

(7) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$

$= \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4)+\frac{5}{2}}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx = \frac{1}{8}\int \frac{d(4x^2+4x+3)}{\sqrt{4x^2+4x+3}} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+2^2}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right| + C$

(8) $\int \frac{1}{2^x(1+4^x)}dx$　令 $t=2^x$

$= \int \frac{1}{t(1+t^2)}\cdot\frac{1}{\ln 2\, t}dt = \frac{1}{\ln 2}\int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{\ln 2}\arctan t + C = \frac{-1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2^x} + \arctan 2^x\right) + C$

(9) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}dx$

$= \int \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\ln(\sin x)}dx = \int \frac{\frac{1}{\sin x}}{\ln(\sin x)}d\sin x = \int \frac{1}{\ln(\sin x)}d\ln\sin x$

$= \ln\left|\ln\sin x\right| + C$

(10) $\int e^x \sin^2 x dx = \int e^x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^x\cos 2x dx$

其中 $\int e^x\cos 2x dx = e^x\cos 2x - \int -2\sin 2x e^x dx = e^x\cos 2x + 2\int \sin 2x de^x$

$= e^x\cos 2x + 2(\sin 2x\cdot e^x - 2\int\cos 2x e^x dx) = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x) - 4\int\cos 2x\cdot e^x dx$

$\therefore \int e^x\cos 2x dx = \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C_1$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) + C = \frac{e^x}{5}(\sin^2 x - \sin 2x + 2) + C$

(11) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{x}{\sin^3 x}d\sin x = \frac{-1}{2}\int x\, d\frac{1}{\sin^2 x}$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x} - \int\frac{1}{\sin^2 x}dx\right)$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{2}\cot x + C$

(12) $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}dx = \int\frac{1}{2\sin x\cos x + 2\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin x(\cos x+1)}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin x\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin x}d\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$

(万能公式)

$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\int\tan\frac{x}{2}d\tan\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C$

(13) $\int \frac{x^{11}}{(x^8+1)^2}dx = \frac{1}{4}\int\frac{x^8}{(x^8+1)^2}dx^4 \xlongequal{令u=x^4} \frac{1}{4}\int\frac{u^2}{(u^2+1)^2}du$

$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{(u^2+1)^2}\right)du = \frac{1}{4}\arctan u - \frac{1}{4}\int\frac{1}{(u^2+1)^2}du$ 或用递推公式

其中第二个积分 $\int\frac{1}{(u^2+1)^2}du \xlongequal{令u=\tan t} \int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}dt = \int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{u^2+1} + C$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{4}\arctan x^4 - \frac{1}{8}\arctan x^4 - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{x^8+1} + C = \frac{1}{8}\arctan x^4 - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{x^8+1} + C$

(14) $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$

$(1-\ln x = x-\ln x - x+1)$

$$原式=\int\frac{x-\ln x - x(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

(15) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2\sin x\cos x+1-1}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+C$$

(16) $\int\frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}dx=\int(\frac{1}{\sin x\cos^3 x}+\frac{1}{\sin^3 x\cos x})dx$

$$=\int(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}+\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x})dx=\int(\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{2}{\sin x\cos x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x})dx$$

$$=-\int\frac{d\cos x}{\cos^3 x}+\int\frac{2\sec^2 x\,dx}{\tan x}+\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}=\frac{1}{2\cos^2 x}+2\ln|\tan x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$$

(17) $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

其中 $\int\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int\arctan x\,d\frac{1}{x}=-(\frac{1}{x}\arctan x-\int\frac{1}{(1+x^2)x}dx)$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)x}dx=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\int\arctan x\,d\arctan x=\frac{1}{2}\arctan^2 x+C$$

$$\therefore 原式=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C$$

4、已知 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\int f(x)dx$。

令 $\ln x=u$，则 $f(u)=\frac{\ln(1+u)}{e^u}$

$$\therefore \int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx \xlongequal[则 dx=\frac{1}{t}dt]{令 e^x=t} \int\frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$$

$$=\int\ln(1+t)d(-\frac{1}{t})=-(\frac{1}{t}\ln(1+t)-\int\frac{1}{(1+t)t}dt)$$

$$=-\frac{1}{t}\ln(1+t)+\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1})dt=-\frac{1}{t}\ln(1+t)+\ln t-\ln(1+t)+C$$

$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+x-\ln(1+e^x)+C$$

5、已知 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 1\\ 2x & x>1\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$\therefore$ 必存在原函数 $F(x)$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+x+C_1 & x\le 1\\ x^2+C_2 & x>1\end{cases}$$ 又 $\because F(x)$ 处处连续，$\therefore$ 有

$F(1+)=F(1-)$ 即 $\frac{1}{2}+1+C_1=1+C_2$ $\quad\therefore C_2=C_1+\frac{1}{2}$.

令 $C=C_1$，则 $\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+x+C & x\le 1\\ x^2+\frac{1}{2}+C & x>1\end{cases}$

6、已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\int xf''(x)dx$。

$$\int xf''(x)dx=\int x\,df'(x)$$

$$=xf'(x)-\int f'(x)dx$$

$$=xf'(x)-f(x)+C$$

又 $f(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\therefore f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$\therefore \int xf''(x)dx=-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

第 5 章　定积分及其应用

5.1　定积分的概念

5.2　定积分的性质

要求：理解定积分的概念、性质及几何意义。

1、填空题

(1) $\int_{-1}^{1}|x|dx=$ <u>1</u>；

(2) $\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx=$ <u>$\frac{\pi R^2}{4}$</u>。

2、选择题

(1) 设 $I_1=\int_0^1 xdx,\ I_2=\int_0^1\sqrt{x}dx, I_3=\int_0^1\ln(1+x)dx$，则 （ C ）

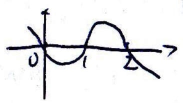
(A) $I_1>I_2>I_3$　　　(B) $I_1>I_3>I_2$

(C) $I_2>I_1>I_3$　　　(D) $I_3>I_2>I_1$

(2)由曲线 $y=x\,(x\text{-}1)\,(2\text{-}x)$ 与 x 轴围成平面图形的面积 S=(C)

(A) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(B) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$



(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

3、比较积分 $\int_1^2 \ln xdx$ 和 $\int_1^2(\ln x)^2dx$ 的大小。

∵当 $1<x<2$ 时，$\ln x \geq (\ln x)^2$ 且 $\ln x \not\equiv (\ln x)^2$

∴ $\int_1^2 \ln x\,dx > \int_1^2 (\ln x)^2 dx$

4、试将 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2})$ 化为定积分。

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

5、估计 $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$ 的积分值。

先考察 $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$

求 e^{x^2-x} 在 $[0,2]$ 上的最值，令 $f(x)=e^{x^2-x}$

$(e^{x^2-x})'=e^{x^2-x}\cdot(2x-1)$　∴得 $[0,2]$ 内驻点 $x=\frac{1}{2}$，其值为 $e^{-\frac{1}{4}}$

而 $f(0)=1$，$f(2)=e^2$　∴ $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上 $\max f(x)=f(2)=e^2$

$\min f(x)=f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$

∴ $2e^{-\frac{1}{4}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leq 2e^2$

∴ $-2e^2\leq\int_2^0 e^{x^2-x}dx\leq -2e^{-\frac{1}{4}}$

5.3 微积分基本定理

要求： 理解积分上限函数及其求导公式；熟练掌握牛顿-莱布尼茨公式。

1、填空题

(1)设 $x=\int_{t}^{0}\sin u du,\ y=\int_{0}^{t}\cos u du$，则 $\frac{dy}{dx}=$ <u>$-\cot t$</u>；

(2) 设 $f(x)$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\int_{a}^{x}xf(t)dt}{x-a}=$ <u>$af(a)$</u>；

(3) 函数 $F(x)=\int_{1}^{x}(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt\ (x>0)$ 的单调减少区间是 <u>$(0,\frac{1}{4})$</u>。

2、选择题

(1) 设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_{x}^{e^{-x}}f(t^2)dt$，则 $F'(x)=$（ A ）

$(A)-e^{-x}f(e^{-2x})-f(x^2)$

$(B)-e^{-x}f(e^{-2x})+2xf(x^2)$

$(C)f(e^{-2x})2x-2xf(x^2)$

$(D)e^{-x}f(e^{-2x})-f(x^2)$

(2) 函数 $f(x)=\int_{0}^{x}\frac{3t+1}{t^2-t+1}dt$ 在区间[0,1]上（ A ）

(A) 单调增加 (B) 单调减少 (C) 先增后减 (D) 先减后增

(3) 函数 $f(x)=\int_{0}^{x}te^{-t}dt$ 在 $x=0$ 处取得（ B ）

(A) 极大值 (B) 极小值 (C) 非极值点 (D) 拐点

3、求由 $\int_{0}^{y}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\cos t dt=0$ 所决定的隐函数 y 对 x 导数 $\frac{dy}{dx}$。

$e^{y}\cdot y'+\cos x=0 \Rightarrow y'=-e^{-y}\cos x$

$e^{y}-1+\sin x=0 \quad \therefore y'=\frac{\cos x}{\sin x-1}$

4、求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\int_{0}^{x^2}\sin t^2 dt$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^4\cdot 2x}{6x^5}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{6}$

$=\frac{1}{3}$

5、计算下列定积分

(1) $\int_{-1}^{0}\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

$=\int_{-1}^{0}(3x^2+\frac{1}{x^2+1})dx$

$=x^3\Big|_{-1}^{0}+\arctan x\Big|_{-1}^{0}$

$=1+\frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^1 a^x e^x dx\ (a \neq \frac{1}{e})$

$= \int_0^1 (ae)^x dx$

$= \frac{(ae)^x}{\ln ae}\Big|_0^1 = \frac{ae-1}{\ln a+1}$

(3) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

$= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$

$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$

$= -(-1-1)+(1+1) = 4$

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 2x} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\csc^2 2x\, dx$

$= -2\cot 2x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$

6、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x < 0 或 x > \pi \end{cases}$，求 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

$x<0$ 时：$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 0\, dt = 0$

$0 \le x \le \pi$ 时：$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x = \frac{1}{2}(1-\cos x)$

$x>\pi$ 时：$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin t\, dt + \int_{\pi}^x 0\, dt$

$= -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^{\pi} + 0 = 1$

$\therefore F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x) & 0 \le x \le \pi \\ 1 & x>\pi \end{cases}$

7、求 a、$b(a>0)$ 的值，使 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt = 1$。

$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}dt}{bx-\sin x} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}$　$(\therefore b=1)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}} = 1$

$\therefore a=4$

5.4 定积分的换元法与分部积分法

要求：熟练掌握定积分的换元法和分部积分法。

5.4.1 定积分的换元积分法

1、选择题

(1) 设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，

0　　$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$　　$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则　　(D)

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

(2) 设 $f(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(t-x)dt$，则$f(x)=$　　(A)

(A) $-\sin x$　(B) $-1+\cos x$　(C) $\sin x$　(D) $1-\cos x$

令 $u=t-x$　$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{0}\sin u du=-\sin(-x)\cdot(-x)'=-\sin x$

2、计算下列定积分

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x\sin^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x dx$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}x d\cos x=-2\cdot\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$

(2) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

$\underline{\underline{令x=\sin t}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)dt=-\cot t-t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=-(0-1)-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

$=1-\frac{\pi}{4}$

(3) $\int_1^4\frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$　令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$

$=\int_1^2\frac{t^2}{1+t}\cdot 2tdt=2\int_1^2\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=2\int_1^2(t^2-t+1-\frac{1}{t+1})dt$

$=2(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln(t+1))\Big|_1^2=\frac{11}{3}-2\ln\frac{3}{2}$

3、证明：$\int_0^{\pi}\sin^n xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 。

左 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x dx$

对右边第二积分作 $x=\pi-t$ 换元

则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\pi-t)d(-t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt$

$\therefore$ 左边 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$

4、设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 内连续、可导，且

$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$ 证明：若 $f(x)$是偶函数，则 $F(x)$也是偶函数。

$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt$

$\underline{\underline{令t=-u}}\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)d(-u)$

$=\int_0^x(x-2u)f(-u)du$　($\because f(u)$为偶函数)

$=\int_0^x(x-2u)f(u)du$

$=F(x)$

$\therefore$ $F(x)$ 也是偶函数

5.4.2　定积分的分部积分法

1、计算下列定积分

(1) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

$= 2\int_1^4 \ln x \, d\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4 - 2\int_1^4 \frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}dx$

$= 2\cdot 2\cdot \ln 4 - 2\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 4\ln 4 - 4\sqrt{x}\Big|_1^4$

$= 4\ln 4 - 4$

(2) $\int_0^1 x\arctan x dx$

$= \int_0^1 \arctan x \, d(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2})dx$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \arctan x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$

$= e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x}\sin x dx$

$= e^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d\cos x$

$= e^{\pi} + 2(0-1) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{2x}dx$

$\therefore 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = e^{\pi} - 2$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{\pi}-2}{5}$

(4) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

$= \int_0^1 \ln(1+x) d\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}\ln(1+x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-2}dx$

$= \ln 2 + \frac{1}{3}\int_0^1 (\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1})dx = \ln 2 + \frac{1}{3}\ln\frac{x-2}{x+1}\Big|_0^1$

$= \ln 2 + \frac{1}{3}(\ln\frac{1}{2} - \ln 2) = \frac{1}{3}\ln 2$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan x d\tan x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \, d\tan^2 x = \frac{1}{2}x\tan^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(6) $\int_0^{\pi} \cos^8 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^8 x dx$

其中 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^8 x dx \xlongequal{令 x=\pi-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^8(\pi-t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt$

$\therefore$ 原式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx = 2\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35}{128}\pi$

2、设 $\int_0^2 f(x)dx = 1$，且 $f(2) = \frac{1}{2}, f'(2) = 0$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$。

$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 df'(2x) = \frac{1}{2}[x^2 f'(2x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x f'(2x)dx]$

$= \frac{1}{2}[f'(2) - \int_0^1 x df(2x)] = \frac{1}{2}[-xf(2x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(2x)dx]$

$= \frac{1}{2}(-f(2) + \int_0^2 f(u)\cdot\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1) = 0$

5.5 广义积分

要求：了解广义积分的定义，会计算较简单的广义积分。

1、填空题(收敛还是发散，若收敛，填入其值)

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$ 发散 ；

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx(a>o)=$ $\frac{1}{a}$ ；

(3) $\int_0^{2}\frac{1}{(1-x)^2}dx=$ 发散 。

2、判定下列广义积分的收敛性，若收敛，计算广义积分的值。

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\arctan x\, d\arctan x$

$=\frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}\right)=0$

(2) $\int_0^1\ln xdx=$ -1 ；

$\int_0^1\ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_{0^+}^{1}=-1-0=-1$

其中 $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x-x)=0-0=0$

(3) $\int_1^e\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

$=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2x}}d\ln x=\arcsin\ln x\Big|_1^{e}$

$=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$

(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}}dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}dx$

$=\arcsin 2(x-\frac{1}{2})\Big|_{\frac{1}{2}}^{1^-}+\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right|\Big|_{1^+}^{\frac{3}{2}}=\arcsin 1+\ln(2+\sqrt{3})$

$=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$

3、当 k 为何值时，广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛？当 k 为何值时，广义积分发散？

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}d\ln x$

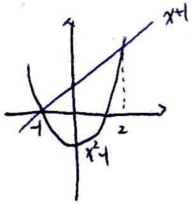
$k>1$ 时，广义积分收敛，~~其~~

$k\le1$ 时，广义积分发散.

5.6　定积分的几何应用

要求：掌握定积分的元素法，掌握用定积分来计算一些几何量。

1、求曲线 $y+1=x^2$ 和直线 $y=1+x$ 所围成平面图形的面积。



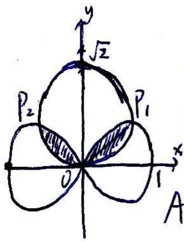
联立 $\begin{cases} y+1=x^2 \\ y=1+x \end{cases}$ 得 $x_1=-1,\ x_2=2$

$\therefore S=\int_{-1}^{2}(x+1-(x^2-1))dx$

$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$

$=\frac{9}{2}$

2、求曲线 $\rho^2=\cos 2\theta$ 与 $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 所围平面图形面积。



由对称性知所求面积A为第一象限部分面积A_1的两倍

联立 $\begin{cases} \rho^2=\cos 2\theta \\ \rho=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ 得 $P_1(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6})$，连接$OP_1$，则$A_1$被分为两个曲边扇形

$A=2A_1=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2 d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta\right]=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta$

$=(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

3、求曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{2}$ 的一段弧的长度。

$s=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+[(\ln x)']^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

令 $t=\sqrt{x^2+1}$，则 $x=\sqrt{t^2-1}$，$dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$

原式 $=\int_2^3\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt=\int_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt$

$=1+\frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

∴所求弧长为 $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

4、求曲线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ 的长度。星形线（$\because x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$）

$\therefore S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a\cos^3 t)'^2+(a\sin^3 t)'^2}\,dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$

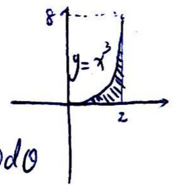
$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}\,dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,dt$

$=12a\ \frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=6a$

5、由 $y=x^3, x=2, y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转所得立体的体积。



$V_x=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2 x^6dx=\frac{128\pi}{7}$

$V_y=V_{圆柱体}-\pi\int_0^8 x^2dy$

$=4\pi\times 8-\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}dy$

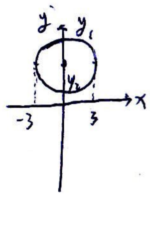
$=32\pi-\frac{3}{5}\cdot 32\pi$

$=\frac{64\pi}{5}$

6、求圆盘 $x^2+(y-5)^2\le 9$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。

所求旋转体体积V为 $y_1=\sqrt{9-x^2}+5$ 绕x轴旋转一周所得立体体积V_1减去 $y_2=-\sqrt{9-x^2}+5$ 绕x轴旋转一周所得立体体积V_2

$\therefore V=V_1-V_2=\pi\int_{-3}^3 y_1^2dx-\pi\int_{-3}^3 y_2^2dx$



$=\pi\int_{-3}^3(34+10\sqrt{9-x^2})dx-\pi\int_{-3}^3(34-10\sqrt{9-x^2})dx$

$=2\pi\int_0^3(34+10\sqrt{9-x^2})dx-2\pi\int_0^3(34-10\sqrt{9-x^2})dx$

$=2\pi\times 2\times 10\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$

$=40\pi\cdot\frac{9}{4}\pi$

$=90\pi^2$

5.8　总习题

1、填空题

奇

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1-x}{1+x}dx=$ $\underline{\quad 0 \quad}$ ；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\cos^3 t dt}{\sin x}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$ ；

$F(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t^2}dt \xlongequal{令u=\frac{1}{t}} \int_1^x\frac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot(-\frac{1}{u^2})du$

$=\int_1^x\frac{\ln u}{1+u^2}du=F(x)$

(3) 设 $F(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}dt$，则 $F(x)-F(\frac{1}{x})=$ $\underline{\quad 0 \quad}$ ；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt$ ，求 $c=$ $\underline{\quad \frac{5}{2} \quad}$ 。

2、选择题

(1) 设 $f(x)=\int_0^{\sqrt{1+x}-1}\ln(1+t)dt, g(x)=\int_0^{\frac{x}{2}}\arcsin t dt$，则 $x\to 0$ 时

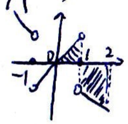
(D)

(*A*) $f(x)$是 $g(x)$的高阶无穷小　(*B*) $f(x)$与 $g(x)$的同阶无穷小
(*C*) $f(x)$是 $g(x)$的低阶无穷小　(*D*) $f(x)$与 $g(x)$等价

(2) 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$，则 $\int_0^2 f(x)dx=$　(A)

$f(x)=\begin{cases}-x & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ x & |x|<1\end{cases}$

(*A*) -1　(*B*) 0　(*C*) 1　(*D*) 2



(3) 设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，其中 $f(x)$连续，$t>0$，$s>0$，则 I 的值

(*A*) 依赖于 s, t　(*B*) 依赖于 t, x，不依赖于 s　(D)
(*C*) 依赖于 s, t, x　(*D*) 依赖于 s，不依赖于 t

令 $tx=u$. $I=t\int_0^s f(u)\cdot\frac{1}{t}du=\int_0^s f(u)du$

(4) 下列广义积分收敛的是　(C)

(*A*) $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　(*B*) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$

(*C*) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$　(*D*) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

(5) 由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积是　(B)

(*A*) $\frac{4}{3}$　(*B*) $\frac{4}{3}\pi$　(*C*) $\frac{2}{3}\pi^2$　(*D*) $\frac{2}{3}\pi$

$\pi\int_0^{\pi}\sin^3 x dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx=2\pi\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\pi}{3}$

3、计算题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2\sin 2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2}}{6x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{6x^2}=-\dfrac{1}{6}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}[\int_0^u\sin t^2 dt]du}{x^8}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t^2 dt\cdot 2x}{8x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t^2 dt}{4x^6}$

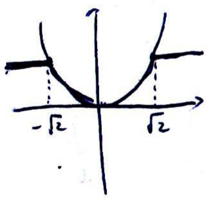
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^4\cdot 2x}{24x^5}=\dfrac{1}{12}$

(3) 设 $x+y^2=\int_0^{y-x}\cos^2 t\,dt$，求 $\frac{dy}{dx}$。

$1+2y\cdot y'=\cos^2(y-x)\cdot(y'-1)$

$\therefore y'=\frac{\cos^2(y-x)+1}{\cos^2(y-x)-2y}$

(4) $\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}dx$



$=\left(\int_{-3}^{-\sqrt2}+\int_{\sqrt2}^{2}\right)2dx+\int_{-\sqrt2}^{\sqrt2}x^2dx$

$=2[(2-\sqrt2)+(3-\sqrt2)]+2\int_0^{\sqrt2}x^2dx$

$=2\cdot(5-2\sqrt2)+2\cdot\frac13\cdot2\sqrt2$

$=10-\frac83\sqrt2$

(5) $\int_0^1\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$

$\underline{\underline{令x=\sin t}}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{\pi}{4}$

(6) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

$\underline{\underline{令x=\sin t}}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac14\sin^2 2t\,dt$

$=\frac14\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4t}{2}dt=\frac18\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$

(7) $\int_{\frac34}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}-1}dx$

令$\sqrt{1-x}=t$
$\therefore x=1-t^2$
$dx=-2t\,dt$

$\int_{\frac12}^{0}\frac{1}{t-1}(-2t)dt=2\int_0^{\frac12}\frac{t}{t-1}dt=2\int_0^{\frac12}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt$

$=1+2\ln|t-1|\Big|_0^{\frac12}=1-2\ln2$

(8) $\int_0^{\pi}x^2\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}x^2\frac{1-\cos2x}{2}dx$

其中 $\int_0^{\pi}x^2\cos2x\,dx=\frac12\int_0^{\pi}x^2d\sin2x=\frac12\left(x^2\sin2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin2x\,dx\right)$

$=-\int_0^{\pi}x\sin2x\,dx=\frac12\int_0^{\pi}x\,d\cos2x=\frac12\left(x\cos2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos2x\,dx\right)$

$=\frac{\pi}{2}+\frac14\sin2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^{\pi}\frac12x^2dx-\frac12\int_0^{\pi}x^2\cos2x$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,d\tan x = \frac{1}{2}x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(\ln\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$

(10) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$

$= -\int_0^1 x\,d\frac{1}{1+e^x} = -\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$

$= -\frac{1}{1+e} + \int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = -\frac{1}{1+e} - \int\frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}$

$= \frac{-1}{1+e} - \ln(1+e^{-x})\Big|_0^1 = \frac{-1}{1+e} + \ln\frac{2e}{e+1}$

(11) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin x dx$

$= -\int_0^{+\infty} e^{-2x}d\cos x = -2\int_0^{+\infty}\cos x e^{-2x}dx - e^{-2x}\cos x\Big|_0^{+\infty}$

$= -2\int_0^{+\infty} e^{-2x}d\sin x - (0-1) = -2(\sin x e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2e^{-2x}\sin x\,dx) + 1$

$= -4\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin x\,dx + 1$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{5}$

(12) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}dx$

设 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+(B+C)x+C}{(1+x)(1+x^2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}$

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{1+x^2}dx$

$= [\frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x]_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}$

$= 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

4、设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 1+x^2, & x<0 \end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$

$\int_1^3 f(x-2)dx \xlongequal{令x-2=u} \int_{-1}^1 f(u)du$

$= \int_{-1}^0 (1+x^2)dx + \int_0^1 e^{-x}dx$

$= 1+\frac{1}{3} - e^{-x}\Big|_0^1$

$= 1+\frac{1}{3} - (e^{-1}-1)$

$= \frac{7}{3} - e^{-1}$

5、设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<-1\\ \frac{1}{2}(1-x), & -1\le x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式。

当 $x<-1$ 时：$\int_0^x f(t)dt=\int_0^{-1}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_{-1}^x 1dt=x+\frac{1}{4}$

当 $-1\le x\le 1$ 时：$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{2}(1-t)dt=(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}t^2)\Big|_0^x$
$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$

当 $x>1$ 时：$\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 \frac{1}{2}(1-t)dt+\int_1^x (t-1)dt$
$=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4}$

$\therefore F(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{4} & x<-1\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2 & -1\le x\le 1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4} & x>1\end{cases}$

6、设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求 $\int_0^1(1-x)^2 f(x)dx$。

$\int_0^1(1-x)^2\int_0^x e^{-y^2+2y}dydx=-\int_0^1\int_0^x e^{-y^2+2y}dy\,d\frac{1}{3}(1-x)^3$

$=-\frac{1}{3}(1-x)^3\int_0^x e^{-y^2+2y}dy\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x^2+2x}\cdot\frac{1}{3}(1-x)^3dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-(x-1)^2+1}(1-x)^3dx\ \underline{\underline{\text{令}1-x=u}}\ \frac{e}{3}\int_0^1 e^{-u^2}\cdot u^3du$

$=-\frac{e}{6}\int_0^1 u^2de^{-u^2}=-\frac{e}{6}(u^2e^{-u^2}\Big|_0^1-\int_0^1 2ue^{-u^2}du)$

$=-\frac{1}{6}e(\frac{1}{e}+\int e^{-u^2}d(-u^2))=-\frac{1}{6}e(\frac{1}{e}+e^{-u^2}\Big|_0^1)=\frac{1}{6}e-\frac{1}{3}$

7、当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小，求 $f'(0)$。

$F(x)=\int_0^x x^2f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt$
$=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2f'(t)dt$

$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt+x^2f'(x)-x^2f'(x)$
$=2x\int_0^x f'(t)dt$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f'(t)dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)}{1}=2f'(0)=1$

$\therefore f'(0)=\frac{1}{2}$

8、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 可微，且满足

$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx\quad(k>1)$，求证：至少存在一点

$\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=(1-\frac{1}{\eta})f(\eta)$。

令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$，则 $F(1)=f(1)$

又 $\because f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}F(x)dx=k\cdot F(\xi)\cdot\frac{1}{k}=F(\xi)\quad \xi\in[0,\frac{1}{k}]$

$\therefore F(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上满足 Rolle Th

$\therefore \exists\eta\in(\xi,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\eta)=0$

即 $xe^{1-x}f'(x)+e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)\Big|_{x=\eta}=0$

$\because e^{1-\eta}\ne0\quad\therefore f'(\eta)=(1-\frac{1}{\eta})f(\eta)$

9、设函数 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$ 证明：

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{Ma^2}{2},\quad \text{其中 } M=\max_{0\le x\le a}|f'(x)| \text{。}$$

对 $\forall x\in[0,a]$，由微分中值 Th.

$f(x)-f(0)=f'(\xi)\cdot x$

$\therefore \left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \int_0^a |f(x)|dx = \int_0^a |f(x)-f(0)|dx$

$= \int_0^a |f'(\xi)x|dx = |f'(\xi)|\int_0^a x\,dx \le M\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^a = \frac{Ma^2}{2}$

10、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少，证明对任意 $a\in(0,1)$，都有

$\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx$ 。(提示：令 $x=at$)

$\int_0^a f(x)dx \overset{\text{令}x=at}{=\!=\!=} \int_0^1 f(at)a\,dt = a\int_0^1 f(at)dt$

则 左边 - 右边 $= a\int_0^1 f(at)dt - a\int_0^1 f(t)dt$

$= a\int_0^1 (f(at)-f(t))dt \quad (\because f(x)\downarrow)$

≥ 0

$\therefore \int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx$

11、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $x\in(0,1), 0<f'(x)<1, f(0)=0,$

证明：$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 > \int_0^1 f^3(x)dx$ 。

设 $F(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-\int_0^x f^3(t)dt$. $F(0)=0$

$F'(x)=2f(x)\left[\int_0^x f(t)dt\right]-f^3(x)$

$= f(x)\left[2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)\right]$

设 $g(x)=2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)$. $g(0)=0$

$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$. $g(x)$ 递增

$\therefore g(x)>g(0)=0$

$\therefore F'(x)>0$. $F(x)$ 递增. $F(x)>0$. $\therefore F(1)>F(0)=0$

$\therefore \left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 > \int_0^1 f^3(x)dx$

12、设 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=x$，

求 $\int_\pi^{3\pi} f(x)dx$ 。

$\int_\pi^{3\pi} f(x)dx = \int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx \overset{\text{令}x-\pi=u}{=\!=\!=} \int_0^{2\pi}[f(u)+\sin(u+\pi)]du$

$= \int_0^{2\pi}[f(u)-\sin u]du = \int_0^{2\pi} f(u)du + \cos u\Big|_0^{2\pi}$

$= \int_0^\pi u\,du + \int_\pi^{2\pi} f(u)du = \frac{1}{2}\pi^2 + \int_\pi^{2\pi}[f(u-\pi)+\sin u]du$

$\overset{\text{令}u-\pi=t}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\pi^2 + \int_0^\pi f(t)+\sin(t+\pi)dt = \frac{1}{2}\pi^2 + \int_0^\pi (t-\sin t)dt$

$= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 + \cos t\Big|_0^\pi = \pi^2 - 2$

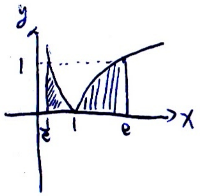
13、$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx$ 及 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}d\,\frac{1}{2}\sin^2 x$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin^2 x\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{\sin^2 x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,d\frac{-1}{x}=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$$
$$=0+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d2x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

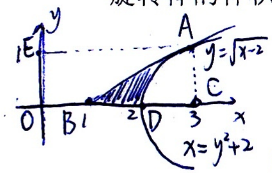
14、求曲线 $y=|\ln x|, x=e, x=\frac{1}{e}$ 及 $y=0$ 所围平面图形的面积。



$S=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx+\int_1^e\ln x\,dx$ 其中第一段分作变量代换 $x=\frac{1}{t}$

$$=-\int_e^1\ln\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+\int_1^e\ln x\,dx$$
$$=\int_1^e\left(\ln x-\frac{1}{x^2}\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e\left(\ln x+\frac{1}{x^2}\ln x\right)dx$$
$$=\int_1^e\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\ln x\,dx=\int_1^e\ln x\,d\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=e-\frac{1}{e}-\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^e$$
$$=2-\frac{2}{e}$$

15、过点 (1,0) 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求由这条切线、抛物线及 x 轴所围成的平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。



$y=\sqrt{x-2}$ 即 $x=y^2+2$ $(y>0)$ 设切点坐标为 $A(x,y)$

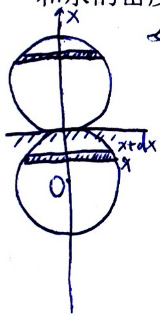
$x=y^2+2$ 两边求导 $1=2yy'$ $\therefore y'=\frac{1}{2y}$ $\therefore \frac{1}{2y}=\frac{y-0}{x-1}$

联立 $y=\sqrt{x-2}$ 得 $x=3$，$y=1$

$$V_x=V_{圆锥体}-V_{ADC}$$
$$=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot(3-1)-\int_2^3\pi(x-2)dx$$
$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$V_y=V_{AEOD}-V_{圆台}$$
$$=\pi\int_0^1(y^2+2)^2dy-\frac{1}{2}(\pi\cdot1^2+\pi\cdot3^2)\cdot1$$
$$=\frac{83\pi}{15}-5\pi=\frac{8\pi}{15}$$

16、将半径为 r 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的密度和水的密度相同，现将球从水中取出，需作多少功？



如图建立坐标系，任取 $[x, x+dx]$

体积 $dV=\pi(r^2-x^2)$

$$dW=g\pi(r^2-x^2)(r+x)dx$$
$$W=\int_{-r}^{r}g\pi(r^2-x^2)(r+x)dx$$
$$=g\pi\int_{-r}^{r}r(r^2-x^2)dx$$
$$=\frac{4}{3}\pi g r^4$$

第 6 章　常微分方程

6.1　微分方程的基本概念

要求：理解微分方程的阶、解、通解、特解、初始条件等概念。

6.2　一阶微分方程

6.2.1　可分离变量的微分方程

要求：熟练掌握可分离变量方程的解法，会解齐次方程。

1、解下列可分离变量的方程。

(1) $y' + x^2 y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 y$$

$$\frac{dy}{y} = -x^2 dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{3}x^3 + \ln|C|$$

$$y = Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$$

(2) $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

$$\frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x(1+x^2)} \qquad \left(\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{x^2+1-x^2}{x(1+x^2)}\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|C_1|$$

$$\therefore \sqrt{1+y^2} = \frac{C_1 x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \therefore (1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$$

(3) $y\,dx + \sqrt{x^2+1}\,dy = 0$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\ln|y| = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \ln|C|$$

$$y(x+\sqrt{x^2+1}) = C$$

2、用适当的变量代换求下列方程的通解。

(1) $xy' = y(1+\ln y - \ln x)$

$$y' = \frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$$

令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$，$y' = u + u'x$

$$u + u'x = u(1+\ln u)$$

$$u'x = u\ln u$$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln|u|| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|u| = Cx$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = Cx$$

$$\therefore y = xe^{Cx}$$

(2) $x^2 y\,dx - (x^3+y^3)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3+y^3} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

令 $\frac{y}{x} = u$，则 $y = ux$，$y' = u + xu'$

$$\therefore u + xu' = \frac{u}{1+u^3}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+u^3} - u = \frac{u-u-u^4}{1+u^3} = \frac{-u^4}{1+u^3}$$

$$\frac{(1+u^3)du}{-u^4} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{u^4}du - \frac{1}{u}du = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3}u^{-3} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \ln|y| + \ln|C_1|$$

$$y = Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$$

6.2.2 一阶线性微分方程

要求：熟练掌握一阶线性方程的解法，了解常数变易法，会解伯努利方程。

1、求下列一阶线性微分方程的通解。

(1) $y'+y=e^{-x}$

$P(x)=1 \quad Q(x)=e^{-x}$

$y=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]=e^{-x}[\int e^{-x}\cdot e^{x}dx+C]$

$=e^{-x}(x+C)$

(2) $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x-2xy-y^2} \qquad \frac{dx}{dy}+(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y})x=1$

$x=e^{\int(\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2})dy}[\int 1\cdot e^{\int(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y})dy}dy+C]$

$=e^{\ln y^2+\frac{1}{y}}[\int e^{-(\ln y^2+\frac{1}{y})}dy+C]=y^2e^{\frac{1}{y}}[\int \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}dy+C]$

$=y^2e^{\frac{1}{y}}[e^{-\frac{1}{y}}+C]$

$=y^2(1+Ce^{\frac{1}{y}})$

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $y'-\frac{1}{x}y=x^2, y(1)=1$

$y'+\frac{x}{1-x^2}y=\frac{1}{1-x^2}$

$y=e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}[\int\frac{1}{1-x^2}e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx+C]$

$=\sqrt{1-x^2}(\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+C]$ （作代换 $x=\sin t$）

$=\sqrt{1-x^2}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C)$

$\because y(0)=1 \quad \therefore C=1$

$\therefore y=x+\sqrt{1-x^2}$

(2) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$, $y(0)=1$

$y=e^{-\int\cos x dx}[\int\sin x\cos x e^{\int\cos x dx}dx+C]$

$=e^{-\sin x}[\int\sin x e^{\sin x}d\sin x+C]$ （令 $\sin x=t$）

$=e^{-\sin x}[\sin x e^{\sin x}-e^{\sin x}+C]$

$\because y(0)=1 \quad \therefore C=2 \quad \therefore y=e^{-\sin x}(\sin x e^{\sin x}-e^{\sin x}+2)$

$=\sin x-1+2e^{-\sin x}$

3、求 $y'+\frac{y}{x}=x^2y^6$ 的通解。

令 $z=y^{-5}$，则 $\frac{dz}{dx}=-5y^{-6}\frac{dy}{dx}$

$\frac{dz}{dx}-5\cdot\frac{z}{x}=-5x^2$

$\therefore z=e^{\int\frac{5}{x}dx}[\int-5x^2\cdot e^{\int-\frac{5}{x}dx}dx+C]=x^5[\int-5x^2\cdot x^{-5}dx+C]$

$=x^5[\frac{5}{2}x^{-2}+C] \qquad \therefore y^{-5}=\frac{5}{2}x^3+Cx^5$

4、求一连续可导函数 $f(x)$，使其满足下列方程

$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$ 。

$\int_0^x f(x-t)dt \xlongequal{令 x-t=u} \int_x^0 f(u)(-1)du=\int_0^x f(u)du$

$\therefore f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)du$ 两边求导

$f'(x)=\cos x-f(x) \qquad f'(x)+f(x)=\cos x$

$f(x)=e^{-\int dx}[\int\cos x e^{\int dx}dx+C]$

$=e^{-x}[\int\cos x e^{x}dx+C]$ （用分部积分法）

$=e^{-x}[\frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)+C]$

$\because f(0)=0 \quad \therefore C=-\frac{1}{2} \quad \therefore f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x-e^{-x})$

6.2.3　几类可降阶的高阶微分方程

要求：会用降阶解法解三类方程：$y^{(n)}=f(x)$、$y''=f(x,y')$、$y''=f(y,y')$。

1、求下列方程的通解。

(1) $y''(1+e^{x})+y'=0$

令 $y'=p$，则 $y''=p'$

$p'(1+e^{x})+p=0$

$\frac{dp}{dx}(1+e^{x})=-p$

$\frac{dp}{p}=-\frac{1}{1+e^{x}}dx$ （同乘 e^{-x} 积分）

$\ln|p|=\ln(e^{-x}+1)+\ln|C_1|$

$p=C_1(e^{-x}+1)$

$y=-C_1e^{-x}+C_1x+C_2$

(2) $y''=1+(y')^2$

令 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$

$p'=1+p^2$　　$\frac{dp}{1+p^2}=dx$

$\arctan p=x+C_1$

$\frac{dy}{dx}=\tan(x+C_1)$

$dy=\tan(x+C_1)dx$

$\therefore y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $(1-y)y''+2(y')^2=0,\ y|_{x=1}=2,\ y'|_{x=1}=-1$

设 $y'=p(y)$，则 $y''=p\cdot p'$

$\therefore(1-y)p\cdot p'+2p^2=0$

$(1-y)\frac{dp}{dy}=-2p$

$\frac{dp}{p}=2\frac{1}{y-1}dy$

$\ln|p|=2\ln|y-1|+C$

$\because y|_{x=1}=2,\ y'|_{x=1}=-1$

$\therefore C=0$

$\therefore |p|=(y-1)^2$

$\because y'|_{x=1}=-1<0$

$\therefore p=-(y-1)^2$

$\frac{dy}{dx}=-(y-1)^2$

$\frac{dy}{-(y-1)^2}=dx$

$\frac{1}{y-1}=x+C_1$

$\because y|_{x=1}=2$　　$\therefore C_1=0$

$\therefore y=\frac{1}{x}+1$

(2) $y''-\frac{1}{x}y'=xe^{x},\ y|_{x=1}=1,\ y'|_{x=1}=e$

令 $y'=p$，则 $y''=p'$

$\therefore p'-\frac{1}{x}p=xe^{x}$

$\therefore p=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right]$

$=x\left[\int e^{x}dx+C_1\right]=x(e^{x}+C_1)$

$\because p|_{x=1}=e$　　$\therefore C_1=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=xe^{x}$

$dy=xe^{x}dx$

$y=\int xe^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C_2$

$\because y|_{x=1}=1$

$\therefore y=xe^{x}-e^{x}+1$

6.2.3　几类可降阶的高阶微分方程

要求：会用降阶解法解三类方程：$y^{(n)} = f(x)$、$y'' = f(x, y')$、$y'' = f(y, y')$。

1、求下列方程的通解。

(1) $y''(1+e^x) + y' = 0$

解：令 $y' = p(x)$，$y'' = p'$，于是有

$\frac{dp}{dx}(1+e^x) + p = 0$ 分离变量得 $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{1+e^x}$

从而 $\ln|p| = -x + \ln(1+e^x) + C_1 \Rightarrow p = C_2(1+e^{-x})$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_2(1+e^{-x}) \Rightarrow dy = C_2(1+e^{-x})dx$

$\Rightarrow y = C_2(x - e^{-x}) + C_3$

(2) $y'' = 1 + (y')^2$

解：令 $y' = p(x)$，$y'' = p'$ 从而 $\frac{dp}{dx} = 1+p^2$

$\Rightarrow \frac{dp}{1+p^2} = dx \Rightarrow \arctan p = x + C_1$

$\Rightarrow p = \tan(x+C_1) \Rightarrow dy = \tan(x+C_1)dx$

$\Rightarrow y = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2$

$= \ln|\sec(x+C_1)| + C_2$

2、求下列微分方程满足初始条件的特解。

(1) $(1-y)y'' + 2(y')^2 = 0, y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = -1$

解：令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$

$\Rightarrow (1-y)p\frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}$

$\Rightarrow \ln|p| = \ln(y-1)^2 + \ln|C_1| \Rightarrow p = C_1(y-1)^2$

又 $y'|_{y=2} = -1$ 即 $p|_{y=2} = -1$ $\therefore C_1 = -1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(y-1)^2 \Rightarrow \frac{dy}{(y-1)^2} = dx$

$\Rightarrow \frac{1}{y-1} = x + C_2$ 又 $y|_{x=1} = 2 \Rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{y-1} = x \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{x}$

(2) $y'' - \frac{1}{x}y' = xe^x, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = e$

解：令 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = xe^x$

$\Rightarrow p = e^{\int\frac{1}{x}dx}[C_1 + \int xe^x e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx]$

$= x(C_1 + e^x)$

$\Rightarrow y' = x(C_1+e^x)$ 又 $y'|_{x=1} = e$

$\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y' = xe^x$

$\Rightarrow y = xe^x - e^x + C_2$ 又 $y|_{x=1} = 1$

$\Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow y = e^x(x-1) + 1$

6.3 高阶线性微分方程

6.3.1 高阶线性微分方程解的结构

要求：理解线性微分方程解的性质及解的结构定理。

6.3.2 常系数线性微分方程

要求：熟练掌握二阶线性常系数齐次微分方程的解法；熟练掌握自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的几种线性常系数非齐次方程的解法。

1、填空题

(1) 已知二阶线性非齐次微分方程的三个特解 $y_1=1, y_2=x$，$y_3=x^2$，该方程的通解为 $y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$

(2)微分方程 $y''-9y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$；

(3) 微分方程 $y''-4y'=0$ 的通解为 $y=C_1+C_2e^{4x}$；

(4) 微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{x}$；

(5) 微分方程 $y''+y'+y=0$ 的通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

2、求下列微分方程的通解

(1) $y'''+y'=0$

解: $r^3+r=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_{2,3}=\pm i$

$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$

(2) $y''+2\lambda y'+y=0$ （λ 为实常数）

解: $r^2+2\lambda r+1=0$

$\Delta=4\lambda^2-4$

(i) 当 $\lambda^2>1$ 时 $r_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}$, $r_2=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}$

$\therefore y=C_1e^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})x}+C_2e^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})x}$

(ii) 当 $\lambda^2=1$ 时, $r_1=r_2=-\lambda$ $\therefore y=(C_1+C_2x)e^{-\lambda x}$

(iii) 当 $\lambda^2<1$ 时, $r_{1,2}=-\lambda\pm i\sqrt{1-\lambda^2}$ $\therefore y=e^{-\lambda x}(C_1\cos\sqrt{1-\lambda^2}x+C_2\sin\sqrt{1-\lambda^2}x)$

3、写出下列方程含待定系数的特解形式（无需求出系数）

(1) $y''-9y=x^2e^{3x}$；

$y^*=xe^{3x}(ax^2+bx+c)$

(2) $y''-8y'+20y=5xe^{4x}\sin 2x$

$y^*=xe^{4x}[(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x]$

(3) $y''-2y'+y=e^x\sin x$；

$y^*=e^x(a\cos x+b\sin x)$

(4) $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$；

$y^*=ce^x+(ax+b)\cos x+(dx+g)\sin x$

4、求下列方程的通解。

(1) $y''-4y'+4y=x$

解：$r^2-4r+4=0$，$r_1=r_2=2$

$\therefore$ 齐次通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

$\lambda=0, m=1$ 不是特征方程的根.

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$，代入方程得

$4b_0x-4b_0+4b_1=x$ $\therefore \begin{cases}4b_0=1\\4b_1-4b_0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b_0=\frac{1}{4}\\b_1=\frac{1}{4}\end{cases}$

$\therefore$ 特解 $y^*=\frac{1}{4}(1+x)$ $\therefore$ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}(1+x)$

(2) $y''-4y'+4y=e^{2x}$；

解：特征方程 $r^2-4r+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=2$

$\therefore$ 齐次通解为 $Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

设特解 $y^*=x^2Ae^{2x}$ 代入方程整理得

$2Ae^{2x}=e^{2x} \Rightarrow A=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$

(3) $y''+y'=\sin x$

解：$r^2+r=0 \Rightarrow r_1=0, r_2=-1$

齐次通解为 $Y=C_1+C_2e^{-x}$

设特解为 $y^*=a\cos x+b\sin x$ 代入方程得 $a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

$\therefore y=C_1+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x$

5、求下列方程满足给定初值条件的特解。

(1) $y''+2y'+2y=xe^{-x}$，$y(0)=0, y'(0)=0$

解：特征方程为 $r^2+2r+2=0 \Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i$

齐次通解为 $Y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

$\lambda=-1$ 不是特征根，设所求特解为 $y^*=e^{-x}(b_0x+b_1)$

代入方程得 $b_0=1, b_1=0$ 特解为 $y^*=e^{-x}(x+0)=xe^{-x}$

$\therefore$ 通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+xe^{-x}$

由 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ $\Rightarrow \begin{cases}C_1=0\\C_2-C_1+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=0\\C_2=-1\end{cases}$

$\therefore y=-e^{-x}\sin x+xe^{-x}=e^{-x}(x-\sin x)$

(2) $y''+9y=\cos x$，$y(\frac{\pi}{2})=y'(\frac{\pi}{2})=0$

解：$r^2+9=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm 3i \Rightarrow$ 齐次通解 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

设 $y^*=a\cos x+b\sin x$ 代入得 $a=\frac{1}{8}$，$b=0$

$\therefore$ 通解为 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{8}\cos x$

由 $y(\frac{\pi}{2})=y'(\frac{\pi}{2})=0$ 有 $\begin{cases}-C_2=0\\3C_1-\frac{1}{8}=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}C_1=\frac{1}{24}\\C_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ 解为 $y=\frac{1}{24}\cos 3x+\frac{1}{8}\cos x$

6.3.3 欧拉方程

要求： 掌握欧拉方程的解法。

求下列方程的解。

1、$x^2y''-4xy'+6y=x$

解：令 $x=e^t$，则

$D(D-1)y-4Dy-6y=e^t$

$\Rightarrow D^2y-5Dy+6y=e^t$

$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=e^t$

特征方程 $r^2-5r+6=0 \Rightarrow r_1=2, r_2=3$

设 $y^*=Ae^t$ 代入有 $A=\frac{1}{2}$

$\therefore y^*=\frac{1}{2}e^t$

$\therefore y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+\frac{1}{2}e^t$

$=C_1x^2+C_2x^3+\frac{1}{2}x$

2、$x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$

解：令 $x=e^t$ 则

$D(D-1)y-Dy+4y=e^t\sin t$

$D^2y-2Dy+4y=e^t\sin t$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+4y=e^t\sin t$

$r^2-2r+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$

$\therefore y^*=e^t(A\cos t+B\sin t)$

代入方程得 $A=0$，$B=\frac{1}{2}$

$\therefore y^*=\frac{1}{2}e^t\sin t$

$\therefore y=e^t(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}e^t\sin t$

$=x[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)]$

6.4 总习题

1、选择题

(1) 若连续函数满足 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2$，则 $f'(x)$（ A ）

（A）$e^{2x}\ln 2$ （B）$2e^{2x}\ln 2$ （C）e^x （D）$2e^{2x}$

(2) 微分方程 $y''+y=\cos x$ 的特解形式为 （ C ）

（A）$\cos x$ （B）$x^2(a\cos x+b\sin x)$

（C）$x(a\cos x+b\sin x)$ （D）$a\cos x+b\sin x$

2、求下列微分方程通解，或满足给定初值条件的特解。

(1) $(1+e^x)yy'=e^x$, $y(1)=1$ （可分离变量）

解: $ydy=\frac{e^x}{1+e^x}dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C_1$

由 $y(1)=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}-\ln(1+e)$

$\therefore \frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+\frac{1}{2}-\ln(1+e)$

(2) $(x+y\cos(\frac{y}{x}))dx-x\cos(\frac{y}{x})dy=0$ （齐次）

解: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$ 令 $u=\frac{y}{x}$ 则

$u+x\frac{dy}{dx}=\frac{1+u\cos u}{\cos u} \Rightarrow \cos u\,du=\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \sin u=\ln|x|+C_1$ $\therefore \sin\frac{y}{x}=\ln|x|+C_1$

或 $x=Ce^{\sin\frac{y}{x}}$

(3) $(y^2-6x)y'+2y=0$ （线性）

解: $\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y$

$x=e^{\int\frac{3}{y}dy}[\int -\frac{1}{2}ye^{-\int\frac{3}{y}dy}dy+C]$

$=y^3(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}+C)=Cy^3+\frac{1}{2}y^2$

(4) $3xy'-y-2xy^4\ln x=0$ （伯努利）

解: $y'-\frac{1}{3x}y=\frac{2}{3}\ln x$ ，$n=4$. 令 $z=y^{1-4}=y^{-3}$，则有

$z'+\frac{1}{x}z=-2\ln x$

$\therefore y^{-3}=z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}[\int -2\ln x\, e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C]$

$=\frac{1}{x}[\int -2x\ln x\,dx+C]=\frac{1}{x}(-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C)$

$=\frac{x}{2}-x\ln x+\frac{C}{x}$

或 $x=y^3[-x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C]$

(5) $x^2y''-(y')^2=0$ （缺y）

解: 令 $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$ 于是

$x^2p'-p^2=0 \Rightarrow \frac{dp}{p^2}=\frac{dx}{x^2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{p}=-\frac{1}{x}+C_1 \Rightarrow p=\frac{x}{1+C_1x}=y'$

$\Rightarrow y=\int\frac{x\,dx}{1+C_1x}=\frac{1}{C_1}\int\frac{C_1x+1-1}{C_1x+1}dx$

$=\frac{x}{C_1}-\frac{1}{C_1^2}\ln(C_1x+1)+C_2$

(6) $y''=2yy', y(0)=y'(0)=1$ （求 x）

解: $y'=p(y)$, $y''=p\frac{dp}{dy}$，则有

$p\frac{dp}{dy}=2yp \Rightarrow dp=2ydy$

$\Rightarrow p=y^2+C_1$ 当 $y=1$ 时 $y'=1$ 于是得 $C_1=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+C_2$

当 $x=0$ 时 $y=1$，于是有 $C_2=-1$

$\therefore -\frac{1}{y}=x-1 \Rightarrow (x-1)y=-1$ 或 $(1-x)y=1$

3、求下列方程的通解（或特解）。

(1) $y''-4y'+4y=3+e^{-2x}$

解: 特征方程 $r^2-4r+4=0$，$r_{1,2}=2$

对应齐次方程通解 $Y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

对 $y''-4y'+4y=3$，设特解 $y_1^*=a$ （$\lambda=0$ 不是特征根）

代入得 $a=\frac{3}{4}$ $\therefore y_1^*=\frac{3}{4}$

对 $y''-4y'+4y=e^{-2x}$，设特解 $y_2^*=be^{-2x}$ （$\lambda=-2$ 不是特征根）

代入得 $4be^{-2x}+8be^{-2x}+4be^{-2x}=e^{-2x}$

$b=\frac{1}{16}$ $\therefore y_2^*=\frac{1}{16}e^{-2x}$

$\therefore$ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{16}e^{-2x}+\frac{3}{4}$

(2) $y''+y'+y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

解: 特征方程 $r^2+r+1=0$，$r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm$

对应齐次方程通解 $Y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

对 $y''+y'+y=\frac{1}{2}$，设特解 $y_1^*=a$ （λ

代入得 $a=\frac{1}{2}$，$\therefore y_1^*=\frac{1}{2}$

对 $y''+y'+y=-\frac{1}{2}\cos 2x$，设特解 $y_2^*=A$

（$\lambda+i\omega=0+2i$ 不是特征根）

代入得 $A=\frac{3}{26}$，$B=-\frac{1}{13}$

$\therefore$ 通解为 $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $y''-2y'+y=e^x+e^{-x}$，$y(0)=1, y'(0)=2$

解: 特征方程 $r^2-2r+1=0$，$r_{1,2}=1$（重根）

对应齐次方程通解 $Y=(C_1+C_2x)e^x$

对 $y''-2y'+y=e^x$，设特解 $y_1^*=Ax^2e^x$ （λ

代入 $A(x^2+4x+4)e^x-2A(x^2+2x)e^x+Ax$

得 $A=\frac{1}{2}$ $\therefore y_1^*=\frac{1}{2}x^2e^x$

对 $y''-2y'+y=e^{-x}$ 设特解 $y_2^*=Be^{-x}$

代入 $Be^{-x}+2Be^{-x}+Be^{-x}=e^{-x}$ 得 B

$\therefore$ 通解 $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x+\frac{1}{4}$

将 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 代入得特解

$y=(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}x)e^x+\frac{1}{2}x^2e^x+\frac{1}{4}e^{-x}$

$-2y'+2y=4e^x$

特征方程 r^2-2r+

齐次通解 $Y=$

特解 $y^*=xe$

$+i\omega=1+i$ 为特

入得 $A=0$，$B=$

通解为 $y=e^x($

$y(\pi)=0$，$y'(\pi)$

特解为 $y=2xe$

数 $f(x)$ 在 $x>0$

$)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)$

由 $f(x)=1+\frac{1}{x}$

$xf(x)=x+$

$f(x)+xf'$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}$

又 $f(1)=1$

$\therefore f(x)=\ln x$

$\int_0^x (x-t) f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt$

(4) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$，$y(\pi)=0$，$y'(\pi)=-2\pi e^{\pi}$

解：特征方程 $r^2-2r+2=0$，$r_{1,2}=1\pm i$

对应齐次通解 $Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$

设特解 $y^*=xe^{-x}(A\cos x+B\sin x)$

（$\alpha+i\omega=1+i$ 为特征方程的单根）

代入得 $A=0$，$B=2$

∴通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+2xe^x\sin x$

由 $y(\pi)=0$，$y'(\pi)=-2\pi e^{\pi}$ 得 $C_1=0$，$C_2=0$

∴特解为 $y=2xe^x\sin x$

4、设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时可微，且满足方程

$f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$，求 $f(x)$。

解：由 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ 得 $f(1)=1$ 且

$xf(x)=x+\int_1^x f(t)dt$ 两边求导得

$f(x)+xf'(x)=1+f(x)$　∴ $xf'(x)=1$

∴ $f'(x)=\frac{1}{x}$　∴ $f(x)=\ln x+C$

又 $f(1)=1$　∴ $C=1$

∴ $f(x)=\ln x+1$

5、设函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x (x-t)f(t)dt=2x+\int_0^x f(t)dt$，试求 $f(x)$

解：两边求导得：$xf(x)+\int_0^x f(t)dt-xf(x)=2+f(x)$

即 $\int_0^x f(t)dt=2+f(x)$ 且满足 $f(0)=-2$

两边求导得 $f(x)=f'(x)$ 即 $f'(x)-f(x)=0$

∴ $f(x)=Ce^{\int dx}=Ce^x$　又 $f(0)=-2$　∴ $C=-2$

∴ $f(x)=-2e^x$

6、由坐标原点向曲线的切线所作垂线之长等于切点的横坐标，求此曲线方程。

解：设曲线方程为 $y=f(x)$，在 (x,y) 处的切线方程为：$Y-y=y'(X-x)$

据题意有 $\frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+y'^2}}=x$　即 $y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{x}{2}y^{-1}$（伯努利方程）

（$x^2(1+y'^2)=(y-xy')^2 \Rightarrow x^2=y^2-2xyy' \Rightarrow y'-\frac{1}{2x}y=-\frac{x}{2x}y^{-1}$）

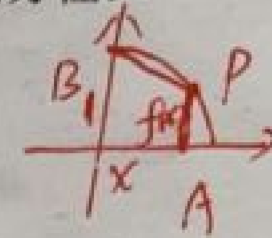
令 $z=y^2$，则 $z'-\frac{1}{x}z=-x$ 从而有

$y^2=z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int -xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$

$=x(-x+C)$

7、已知曲线 c 过点 $A(1,0)$ 及 $B(0,1)$，且 $\overset{\frown}{AB}$ 为凸弧，P 为曲线 c 上异于点 B 的任一点，已知弧 $\overset{\frown}{PB}$ 与弦 $\overline{PB}$ 所围成的平面图形 的面积等于点 P 的横坐标的立方，求曲线 c 的方程。

解：设曲线 $y=f(x)$，据题意有：



$$\int_0^x f(t)dt - \frac{[f(x)+1]x}{2} = x^3$$

求导得 $f(x) - \frac{f(x)+1}{2} - \frac{x}{2}f'(x) = 3x^2$ 且 $f(1)=0$（过A点）

（$\frac{1}{2}f(x) - \frac{x}{2}f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow xf'(x) - f(x) = -1 - 6x^2 \Rightarrow f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x} - 6x$）

（一阶线性）

整理得 $f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = -\frac{1}{x} - 6x$ 且 $f(1)=0$

解得 $f(x) = e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\left(-\frac{1}{x}-6x\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx + C\right]$.

$= x\left(\frac{1}{x} - 6x + C\right) = -6x^2 + Cx + 1$

又 $f(1)=0$ 从而 $C=5$

$\therefore f(x) = -6x^2 + 5x + 1$，$x \in [0,1]$.

注：$f(x) - \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2}f'(x) - \frac{x}{2}$

8、设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x) = \sin x -$ ...

求 $f(x)$。

解：$f(x) = \sin x - x\int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$

两边对 x 求导

$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x)$

$= \cos x - \int_0^x f(t)dt$

再求导 $f''(x) = -\sin x - f(x)$ 即 $f''(x) + f(x) = -\sin x$

特征方程 $r^2+1=0$，$r_{1,2} = \pm i$

对应齐次方程通解 $Y = C_1\cos x + C_2\sin x$

$\lambda \pm i\omega = \pm i$ 是单根，设特解 $y^* = x(A\cos x + B\sin x)$

代入 $2A\cos x - 2B\sin x = -\sin x$

得 $A=0$，$B=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = Y + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\cos x$

令 $x=0$ 得 $f(0)=0$ 得 $C_1=0$

令 $f'(0)=1$ 得 $C_2=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x$

2017

《高等数

择题（本题

→0时，下列

$x^2(e^{x^2}-1)$

$\sqrt{1+x}-1$

数 $f(x) = \frac{x}{|x|}$

可去间断点

振荡间断点

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin^2 \\ 0 \end{cases}$

连续、不可导

不连续、不可

$f(x)$ 可导，若

$f'(\sin x)d\sin$

$[f(\sin x)]'d$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 在[

在[-1,1]上不连续

在(-1,1)内有不